Equazioni / disequazioni con valore assoluto

Sia $a \in \mathbb{R}$, abbiamo definito VALORE ASSOLUTO di a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Più in generale se $a(x)$ è una qualsiasi espressione che dipende da x:

$$|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0. \end{cases}$$

Vogliamo risolvere equazioni e disequazioni con valore assoluto.

Tipo più semplice di equazioni / disequazioni:

$|a(x)| = b(x)$

$|a(x)| \geq b(x)$

$|a(x)| \leq b(x)$

$|a(x)| > b(x)$

$|a(x)| < b(x)$

Per risolverle, si osserva che

$$|a(x)| = b(x) \iff |a(x)| = b(x) \wedge (a(x) \geq 0 \vee a(x) < 0)$$

$$\iff (|a(x)| = b(x) \wedge a(x) \geq 0) \vee (|a(x)| = b(x) \wedge a(x) < 0)$$

$$\iff (a(x) = b(x) \wedge a(x) \geq 0) \vee (-a(x) = b(x) \wedge a(x) < 0)$$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} a(x) = b(x) \\ a(x) \geq 0 \end{cases}} \vee \begin{cases} -a(x) = b(x) \\ a(x) < 0. \end{cases}$$

Sistema misto con una equazione e una disequazione. Per risolverlo basta risolvere l'equazione e verificare se le sue soluzioni risolvono anche la disequazione

ESEMPIO

Risolviamo: $|6x-1| = 11x-3$

L'equazione equivale a:

$$\begin{cases} 6x-1 \geq 0 \\ 6x-1 = 11x-3 \end{cases} \vee \begin{cases} 6x-1 < 0 \\ -6x+1 = 11x-3 \end{cases}$$

$2 = 5x$

$x = \frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5}$ soddisfa anche la disequazione $6x-1 \geq 0$? SI

$6 \cdot \frac{2}{5} - 1 = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5} > 0$

Quindi $x = \frac{2}{5}$ è una soluzione del primo sistema

$4 = 17x$

$17x = 4$

$x = \frac{4}{17}$

Ma

$6 \cdot \frac{4}{17} - 1 = \frac{24}{17} - 1 = \frac{7}{17} \cancel{<} 0$

Quindi il secondo sistema non ha soluzioni

Conclusione $x = \frac{2}{5}$ è l'unica soluzione dell'equazione

Attenzione

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $|a| = b \cancel{\Leftrightarrow} a = b \vee -a = b$

(infatti: $a = -b \vee b = -a \not\Rightarrow |a| = b$)

(Nota: Si dimostra che: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$)

L'equivalenza corretta è

2) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ -a = b \end{cases}$

3) Vale anche l'equivalenza:

$|a| = b \Leftrightarrow |a| = b \wedge b \geq 0$

$$\iff \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \vee \begin{cases} b \geq 0 \\ -a = b \end{cases}$$

L'equivalenza 3) fornisce un metodo alternativo per risolvere equazioni del tipo $|a(x)| = b(x)$

Nell'esempio precedente

$$|6x - 1| = 11x - 3$$

È anche equivalente a:

$$\begin{cases} 11x - 3 \geq 0 \\ 6x - 1 = 11x - 3 \end{cases} \vee \begin{cases} 11x - 3 \geq 0 \\ -6x + 1 = 11x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x - 3 \geq 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} 11x - 3 \geq 0 \\ x = \frac{4}{17} \end{cases} \times$$

$$x = \frac{2}{5}$$

No soluzioni.

Ricapitolando: due metodi per risolvere $|a(x)| = b(x)$

1) $|a(x)| = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}$

2) $|a(x)| = b(x) \iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}$

- Il primo metodo funziona anche per equazioni più generali del tipo $f(x, |a(x)|) = 0$ dove $f(x, |a(x)|)$ è una qualsiasi espressione che dipende da x e $|a(x)|$

$$f(x, |a(x)|) = 0 \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ f(x, a(x)) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ f(x, -a(x)) = 0 \end{cases}$$

- Il secondo metodo funziona solo per equazioni del tipo: $|a(x)| = b(x)$.

ESEMPIO

$$|x^2-4| = 2x+1$$

Equivale a:

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4 = 2x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-4 < 0 \\ -x^2+4 = 2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2-2x-5=0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = 1 \pm \sqrt{6}$$

Verifichiamo se questi numeri risolvono anche la prima condizione del sistema

$x = 1+\sqrt{6}$ ✓ $(1+\sqrt{6} \geq 2)$

$x = 1-\sqrt{6}$ ✗

$(1-\sqrt{6} > 1-3 = -2$ e $1-\sqrt{6} < 0 < 2)$

$x = 1+\sqrt{6}$ è l'unica soluzione del primo sistema.

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = \begin{cases} 1 & ✓ \\ -3 & ✗ \end{cases}$$

Solamente $x=1$ soddisfa la condizione $-2<x<2$. Quindi $x=1$ è l'unica soluzione del secondo sistema

Le soluzioni dell'equazione sono $x = 1+\sqrt{6} \vee x = 1$.

Gli stessi metodi si applicano per le disequazioni. Valgono infatti le seguenti equivalenze (analoghe al metodo 1):

$$|a(x)| \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \leq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| > b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) > b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) < b(x) \end{cases}$$

Questi metodi si possono applicare a disequazioni più generali che coinvolgono espressioni qualsiasi dipendenti da x e $|a(x)|$.

ESEMPIO

$$x - |2x-3| \geq 1$$

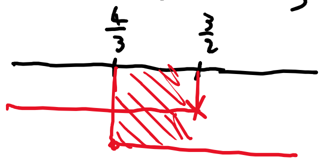
La disequazione equivale a:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-(2x-3) \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ x + \underbrace{2x-3}_{-(-(2x-3))} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -x \geq -2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

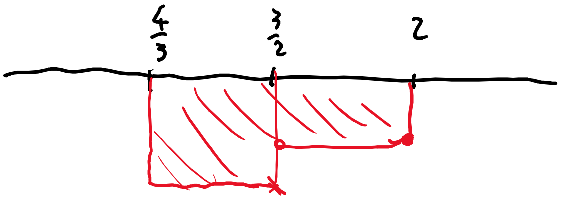


$$\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$$

Conclusione:

Le soluzioni della disequazione sono

$$\frac{3}{2} \le x \le 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \le x < \frac{3}{2}$$



cioè $\frac{4}{3} \le x \le 2$

Per le disequazioni, esistono metodi analoghi al secondo metodo che abbiamo visto per le equazioni? SI, sono basati sulle seguenti equivalenze

OSS

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ |a| \le b \iff -b \le a \le b \iff \begin{cases} a \le b \\ a \ge -b \end{cases}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ |a| < b \iff -b < a < b \iff \begin{cases} a < b \\ a > -b \end{cases}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ |a| \ge b \iff a \ge b \ \vee \ a \le -b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ |a| > b \iff a > b \ \vee \ a < -b$$

(Nota: Diversamente da quanto succede per le equazioni, queste equivalenze sono vere indipendentemente dal segno di b)

Per l'esempio precedente:

$$x - |2x - 3| \ge 1$$

$$x - 1 \ge |2x - 3|$$

$$|2x - 3| \le x - 1$$

$$\begin{cases} 2x-3 \le x-1 \\ 2x-3 \ge -x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ 3x \ge 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ x \ge \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \frac{4}{3} \le x \le 2.$$

ESEMPIO

$$\frac{|4x-3|}{x-2} \le x$$

$$(1)\ \begin{cases} 4x-3 \ge 0 \\ \dfrac{4x-3}{x-2} \le x \ (*) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4x-3 < 0 \\ \dfrac{-4x+3}{x-2} \le x \end{cases}\ (2)$$

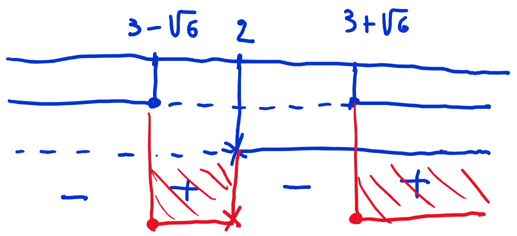
$$\frac{4x-3}{x-2} - x \le 0$$

$$\frac{4x-3-x(x-2)}{x-2} \le 0$$

$$\frac{4x-3-x^2+2x}{x-2} \le 0$$

$$\frac{-x^2+6x-3}{x-2} \le 0$$

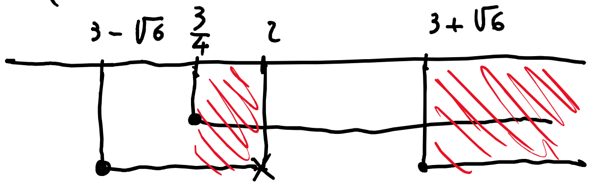
$$\frac{x^2-6x+3}{x-2} \ge 0 \qquad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}$$



$$3-\sqrt{6} \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3+\sqrt{6}$$

Il sistema 1 si risolve come:

$$\begin{cases} x \ge \frac{3}{4} \\ 3-\sqrt{6} \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3+\sqrt{6} \end{cases}$$



$$\frac{3}{4} \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3+\sqrt{6}$$

Questa è la soluzione del 1° sistema

Attenzione a confrontare bene $\frac{3}{4}$ e $3-\sqrt{6}$!

$$\frac{3}{4} \le 3-\sqrt{6} \ ? \qquad \text{FALSO}$$

$$\sqrt{6} \le 3-\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{6} \le \frac{9}{4}$$

$$6 \le \frac{81}{16}$$

$$6 \cdot 16 \le 81$$

$$96 \le 81 \qquad \text{FALSO}$$

Quindi $\frac{3}{4} > 3-\sqrt{6}$

- Passiamo al secondo sistema:

$$(2) \begin{cases} 4x-3 < 0 \\ \dfrac{-4x+3}{x-2} \le x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ \dfrac{-4x+3}{x-2} \le x \end{cases} \iff$$

$x < \frac{3}{4} \Rightarrow x-2 < 0$ quindi si può moltiplicare per $x-2$ cambiando verso alla disequazione

$$\begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ -4x+3 \ge x(x-2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ x^2+2x-3 \le 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ -3 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\iff -3 \le x < \frac{3}{4}$$

<u>Conclusione</u>: Le soluzioni della disequazione iniziale sono:

$$-3 \le x < \frac{3}{4} \quad \vee \quad \frac{3}{4} \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3+\sqrt{6}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3 \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3+\sqrt{6}$$

ESEMPIO

$$|x^2 - x - 2| \le x^2 - 1$$

I° metodo:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0 \\ x^2 - x - 2 \le x^2 - 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ -x^2 + x + 2 \le x^2 - 1 \end{cases}$$

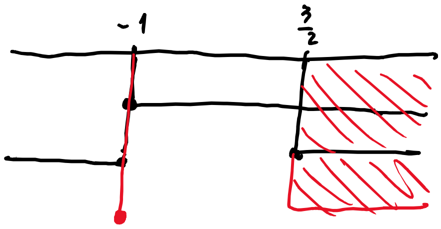
II metodo:

$$\begin{cases} \cancel{x^2} - x - 2 \le \cancel{x^2} - 1 \\ x^2 - x - 2 \ge -x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \le 1 \\ 2x^2 - x - 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1 \\ 2x^2 - x - 3 \ge 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1 \\ x \ge \frac{3}{2} \quad \vee \quad x \le -1 \end{cases}$$



$$x \ge \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

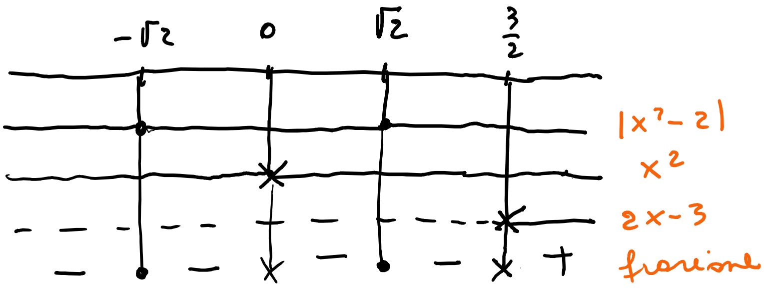
Importante

Non fate conti quando non è necessario:

1) $|x-3| + x^2 > 0$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $x^8 + |x^4 - 1| \geq 0$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $$\frac{|x^2-2|}{x^2(2x-3)} \leq 0$$



$x < \frac{3}{2}$, $x \neq 0$

Si noti anche che

- $\dfrac{|x^2-2|}{x^2(2x-3)} < 0 \iff x < \frac{3}{2}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm\sqrt{2}$

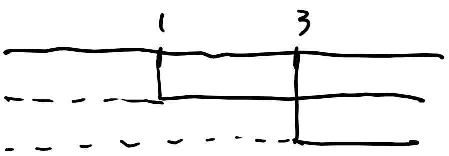
- $\dfrac{|x^2-2|}{x^2(2x-3)} \geq 0 \iff x > \frac{3}{2}$ $\vee$ $x = \pm\sqrt{2}$

- E se un'equazione contiene più di un valore assoluto ?

ESEMPIO

$$\frac{|x-1|}{x+2} \leq |x-3| + x + 1$$

Rappresentiamo i segni di $x-1$ e di $x-3$



$$\begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{-x+1}{x+2} \le -x+3+x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 \le x < 3 \\ \dfrac{x-1}{x+2} \le -x+3+x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x-1}{x+2} \le x-3+x+1 \end{cases}$$

(1) (2) (3)

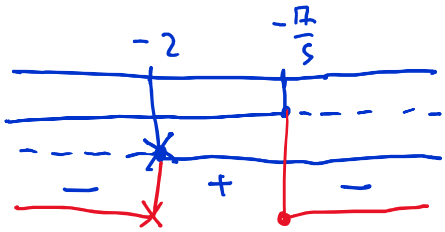
Svolgimento dei tre sistemi (esercizio per casa):

(1) $$\begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{-x+1}{x+2} \le 4 \end{cases}$$

$$\frac{-x+1}{x+2} - 4 \le 0$$

$$\frac{-x+1-4x-8}{x+2} \le 0$$

$$\frac{-5x-7}{x+2} \le 0$$



$$x < -2 \quad \vee \quad x \ge -\frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \ \vee \ x \ge -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$x < -2 \quad \vee \quad x \ge -\frac{7}{5}$$

(2) $$\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ \dfrac{x-1}{x+2} \le -x+3+x+1 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x+2} \le 4$$

(si noti che $x+2>0$ perché $1 \le x < 3$ quindi si può moltiplicare per $x+2$)

$$x-1 \le 4x+8$$

$$-9 \le 3x$$

$$3x \ge -9$$

$$x \ge -3$$

$$\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ x \ge -3 \end{cases}$$

$$1 \le x < 3$$

3

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ \dfrac{x-1}{x+2} \leq x-3+x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3 \\ \dfrac{x-1}{x+2} \leq 2x-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3 \\ 1 \leq 2(x+2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x \geq -3 \end{cases} \iff x \geq 3$$

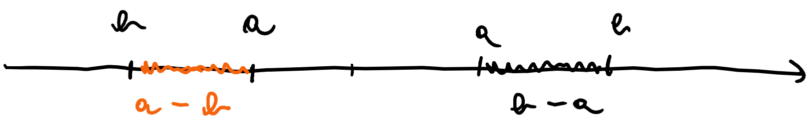
<u>Soluzione finale</u>:

$$\left(x < -2 \;\vee\; -\frac{7}{5} \leq x < 1 \right) \vee\; 1 \leq x < 3 \;\vee\; x > 3$$

cioè: $\quad x < -2 \;\vee\; x \geq -\frac{7}{5}$

PROPRIETÀ DEL VALORE ASSOLUTO:

1) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a| \geq 0$
2) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a| = 0 \iff a = 0$
3) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a\,b| = |a| \cdot |b|$
4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a+b| \leq |a| + |b|$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0: \quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
6) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a-b| \leq |a| + |b|$
7) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad |a-b| \geq \big|\,|a| - |b|\,\big|$
8) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a| = |-a|$ e $\quad |a^2| = a^2 = |a|^2$
9) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^2} = |a|$
10) $|a-b|$ rappresenta la DISTANZA tra a e b sulla retta reale.



Equazioni e disequazioni con radicali

Sono equazioni / disequazioni in cui l'incognita x compare sotto un simbolo di radice

ESEMPIO PIÙ SEMPLICE

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$$

Ricordare

Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari:

$$a = b \iff a^n = b^n$$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

Se n è pari, $n \neq 0$:

$$a = b \implies a^n = b^n$$

$$\cancel{\Longleftarrow}$$

$$a^n = b^n \iff |a| = |b|$$

$$\iff a = b \ \vee \ a = -b$$

Metodo per risolvere $\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$

- Se n è dispari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^n$$

- Se n è pari, $n \neq 0$:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 & \text{CONDIZIONE DI ESISTENZA} \\ b(x) \geq 0 & \text{CONDIZIONE DI COMPATIBILITÀ DEI SEGNI} \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x)^n \end{cases}$$

ESEMPI

1) $\sqrt[3]{2x^2-x} = x$

radice di indice 3 (dispari) si può elevare al cubo

$2x^2-x = x^3$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^2-2x+1) = 0$

$x(x-1)^2 = 0 \iff x=0 \vee x=1.$

2) $\sqrt{2x^2-3} = x$

(radice di indice 2: bisogna fare attenzione ai segni)

Equivale a:

$$\begin{cases} 2x^2-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2-3 = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \vee x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x \geq 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$-\sqrt{3}$ va escluso perché è negativo

$x = \sqrt{3}$ è l'unica soluzione.

f