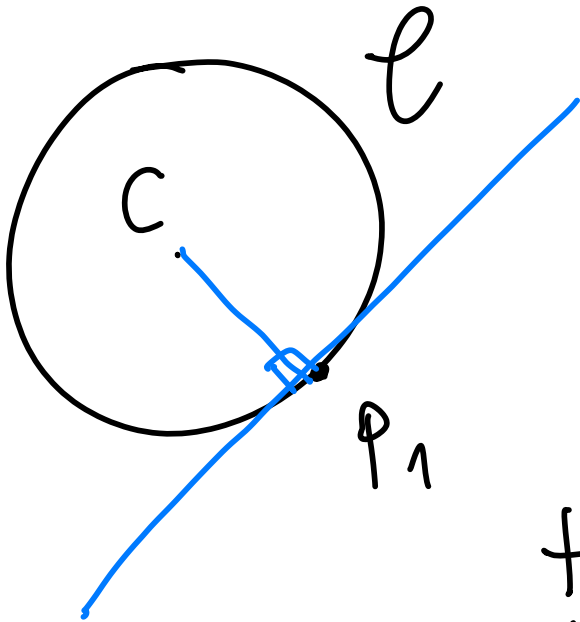


17/09/25



Se C è circonferenza di centro C e $P_1 \in C$.

Allora la retta

tangente a P_1 è

la retta ortogonale al

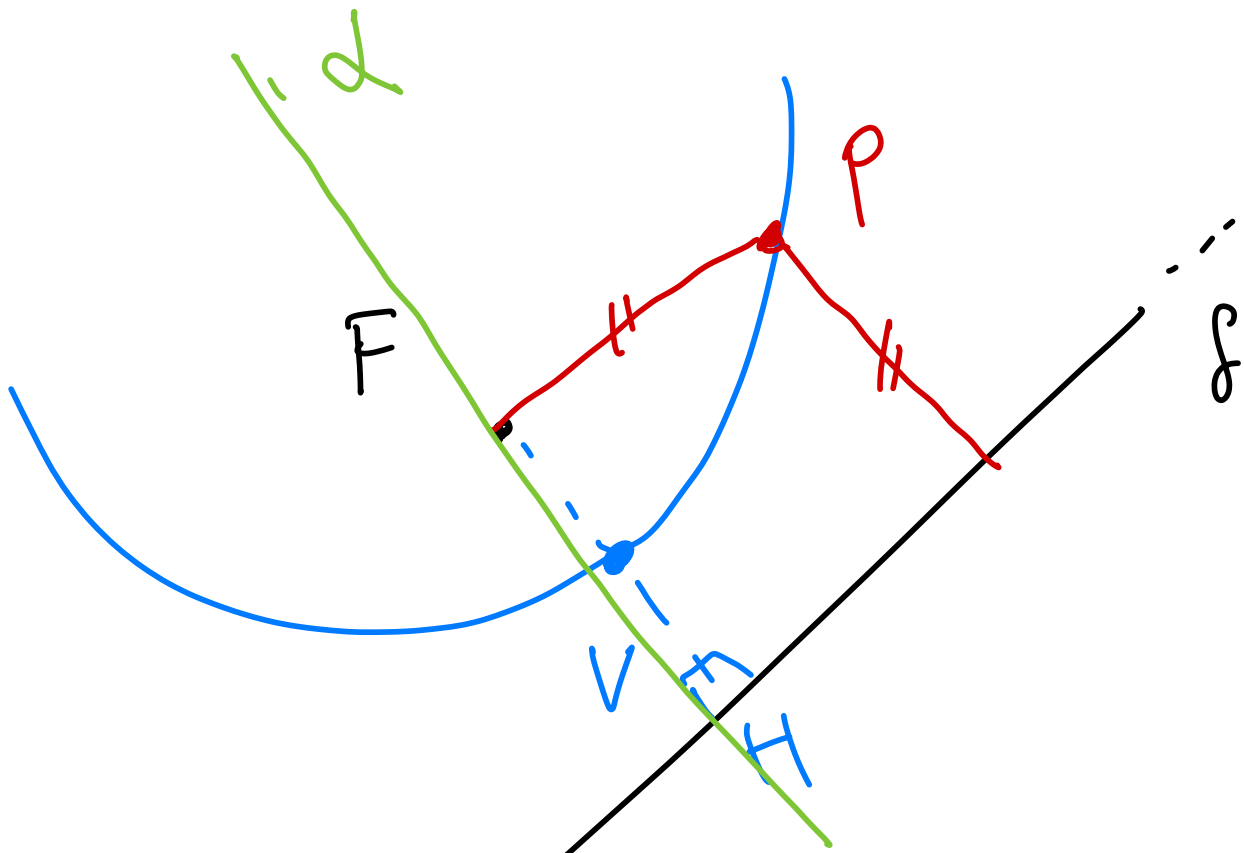
segmento CP_1 , cioè alla retta passante per C e P_1 .

Parabola

La parabola P di fuoco F e direttrice δ è il luogo di punti P che sono equidistanti da F e da δ .

La distanza fra F e δ è detta distanza focale e si indica con $2p$. Se H è la proiezione ortogonale di F su δ , allora il punto medio V

di FH è detto vertice della parabola
e la retta α ortogonale a δ passante
per F è detta asse della parabola.



$$d(P, F) = d(P, \delta)$$

α è ASSE DI SIMMETRIA

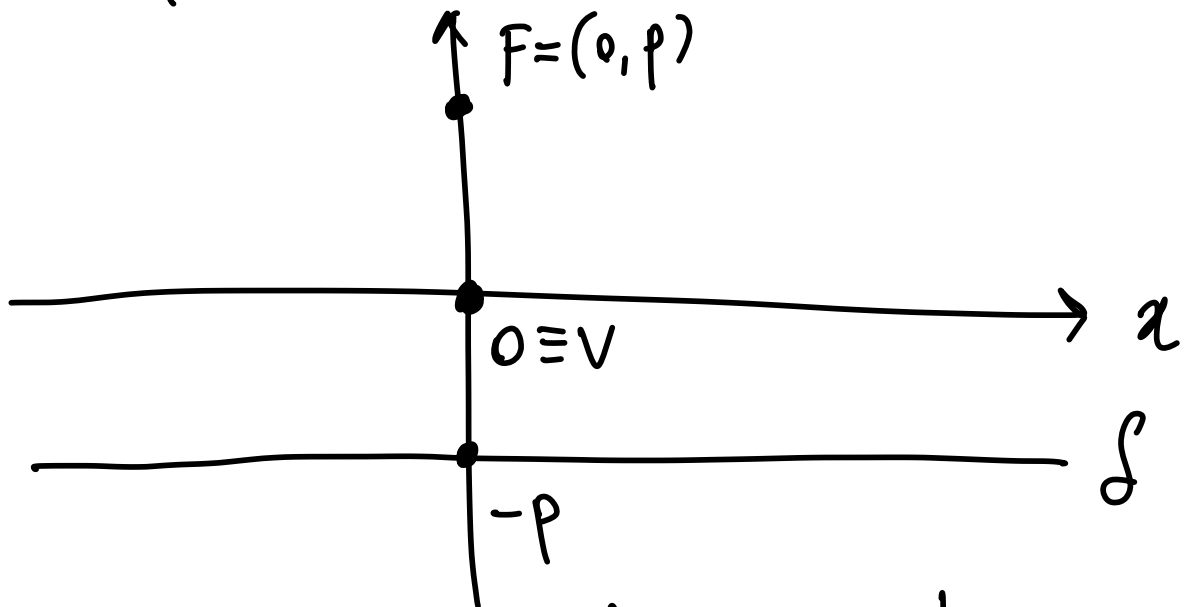
Esercizio per casa:

$$F = (0, 2) \text{ e } \delta: y = \frac{x}{2} + 1$$

Scrivere l'equazione della parabola
con fuoco F e direttrice δ .

Scegliamo un riferimento Cartesiano in cui l'origine coincide col vertice V e l'asse x delle ascisse sia parallelo alla direttrice δ .

Ad esempio: $\delta: y = -p \quad p > 0$



I punti $P = (x, y)$ che appartengono alla parabola $\mathcal{P}$ devono verificare

$$d(P, F) = d(P, \delta)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2yp + p^2} = |y+p| \quad \text{elevo al quadrato}$$

$$\cancel{x^2 + y^2} - 2yp + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2yp + \cancel{p^2}$$

$$y = \frac{1}{4p} x^2$$

Per determinare l'equazione di una parabola con direttrice parallela all'asse orizzontale e vertice in $V' = (\alpha, \beta)$, basterà effettuare un cambio di variabili:

$$x' = x + \alpha, \quad y' = y + \beta$$

$$x = x' - \alpha, \quad y = y' - \beta$$

$$y = \frac{1}{4p} x^2 \text{ diventa } (y' - \beta) = \frac{1}{4p} (x' - \alpha)^2$$

In particolare, se $\alpha = -\frac{b}{2a}$

con a, b, c qualsiasi $\Rightarrow$ trovo

$$y = ax^2 + bx + c$$

In generale, quindi, l'equazione

$y = ax^2 + bx + c$ descrive una
 parabola di
 vertice $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$
 fuoco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
 direttrice $d: y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
 asse $\alpha: x = -\frac{b}{2a}$

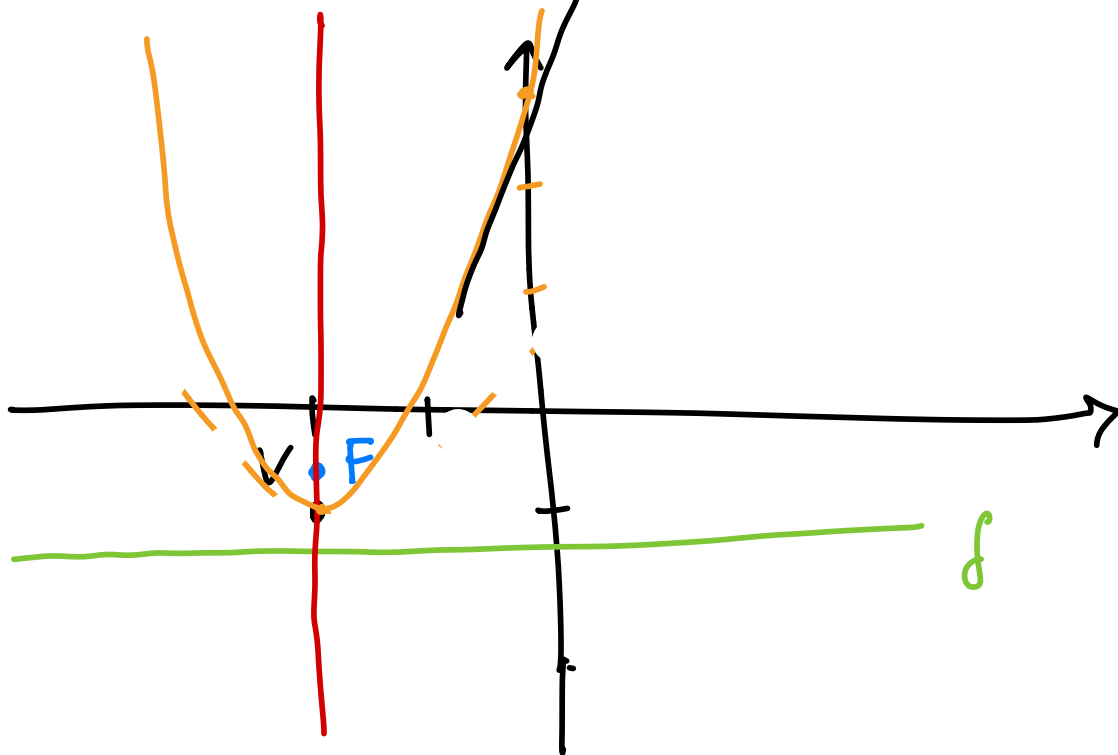
Esempio: Determinare vertice, fuoco, direttrice e asse della parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 3$

$$\begin{aligned}
 V &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) & \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= \left(-\frac{4}{2}, -\frac{4}{4}\right) & a &= 1 \\
 &= (-2, -1) & b &= 4 \\
 & & c &= 3 \\
 & & \Delta &= 16 - 12 = 4
 \end{aligned}$$

$$\alpha: x = -2$$

$$F = \left(-2, \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(-2, -\frac{3}{4}\right)$$

$$d: y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{5}{4}$$



Si può dimostrare che se $a > 0$ allora la parabola ha concavità rivolta verso l'alto $\cup$, altrimenti se $a < 0$, la concavità è rivolta verso il basso $\cap$.

La retta tangente alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel punto di ascissa x_0 $(x_0, ax_0^2 + bx_0 + c)$

si può scrivere come

$$y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c.$$

Esempio s'ha $P: y = x^2 + 4x + 3$

$$V = (-2, -1)$$

$$P_0 = (0, 3)$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 4 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r: y &= (-4 + 4)x - 4 + 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

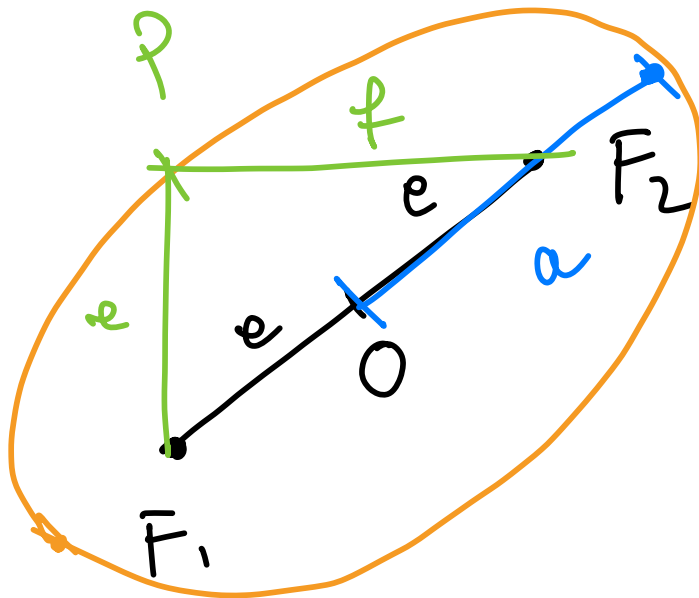
$$S: y = 4x + 3$$

Ellisse

Dati due punti F_1 e F_2 a distanza $2c$ ($c > 0$), e $a > c$, si dice Ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi F_1 e F_2 e semiasse maggiore a , l'insieme dei punti P tali che la somma delle distanze da F_1 e F_2 è pari a $2a$.

La quantità c viene detta semidistanza focale; il punto medio fra F_1 e F_2 viene detto CENTRO; la retta r passante per F_1 e F_2 s' dice asse focale.

$$a > c$$



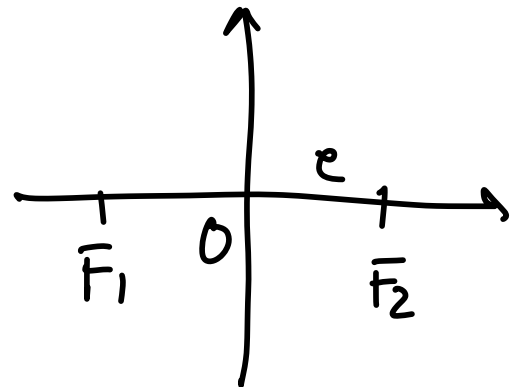
$$e + f = 2a$$

Se $F_1 = (x_1, y_1)$ $P = (x, y)$
 $F_2 = (x_2, y_2)$

$$E: d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Scegliamo un riferimento tale che
 il centro coincida con l'origine e
 l'asse focale con l'asse delle
 ascisse (asse x)

$$F_1 = (-c, 0) \quad F_2 = (c, 0)$$



Se $P = (x, y)$

$$\mathcal{E} : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b^2 = a^2 - c^2$$

Traslando l'origine nel punto (x_0, y_0) , trovo l'equazione

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Esempio: l'equazione

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 3 = 0 \quad (*)$$

rappresenta un'ellisse di centro $(1, -1)$ e semiassi $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

$$\textcircled{*} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + 4y^2 + 8y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4y^2 + 8y - 4 = 0$$

$+4-4$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y+2)^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + (y+1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1}$$

L'eccentricità dell'ellisse E di semiasse maggiore a e semi-distanza focale c è il rapporto $\frac{c}{a}$

$$0 \leq \frac{c}{a} < 1$$

↑
circonferenza

iperbole

Deti due punti F_1 ed F_2 a distanza $2c$, se $a < c$, si dice iperbole di

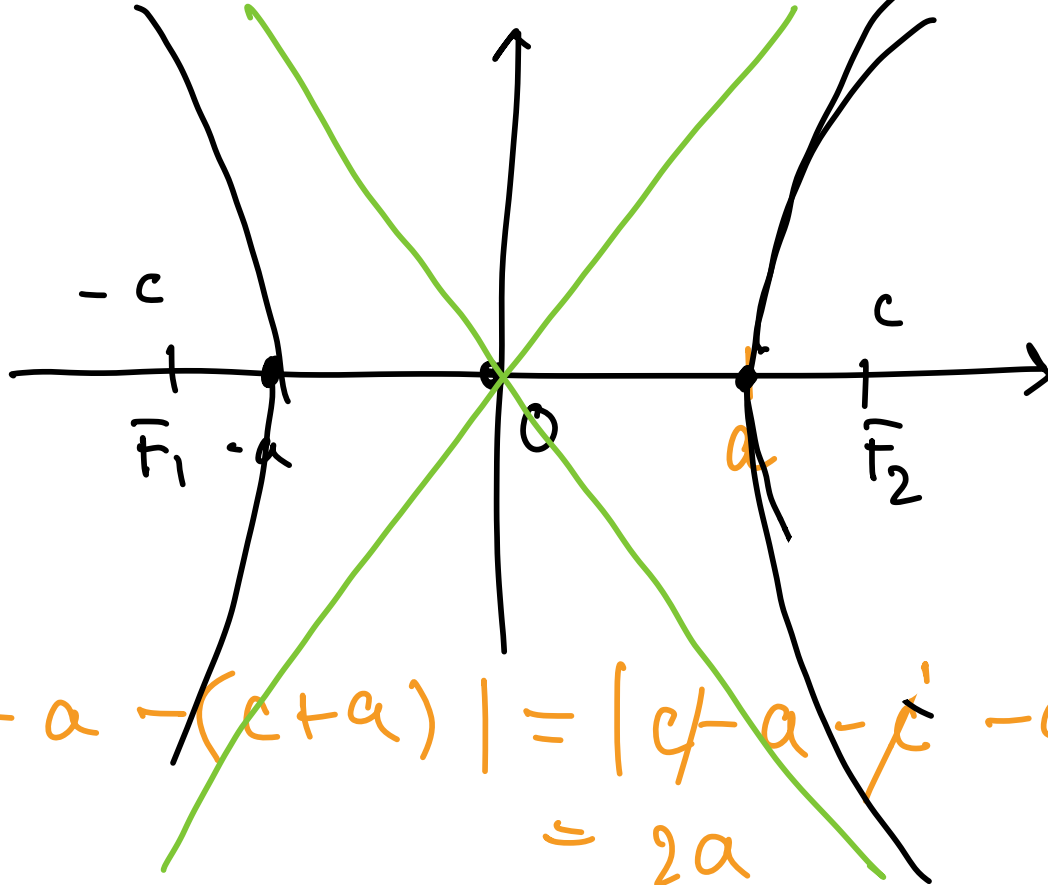
fuochi F_1 e F_2 e semiasse trasverso a ,
l'insieme di punti P tali che il
valore assoluto della differenza delle
distanze da F_1 e F_2 vale $2a$.

La quantità a viene detta semidistanza
focale; il punto medio C di F_1F_2
viene detto centro; la retta r per
 F_1 e F_2 è detta asse focale.

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Fissato un sistema di riferimento
in cui l'origine O coincide con C e
l'asse focale con l'asse delle ascisse,
allora l'iperbole $\mathcal{H}$ sarà descritta
da un'equazione del tipo:

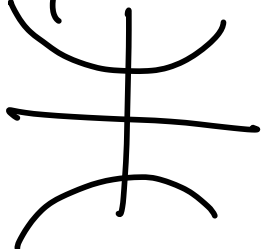
$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \boxed{b^2 = c^2 - a^2}$$



I punti di coordinate $(\pm a, 0)$
 si dicono vertici di $\mathcal{H}$.

Le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono ASINTOTI

L'analoga iperbole con folde
 sopra-sotto è descritta

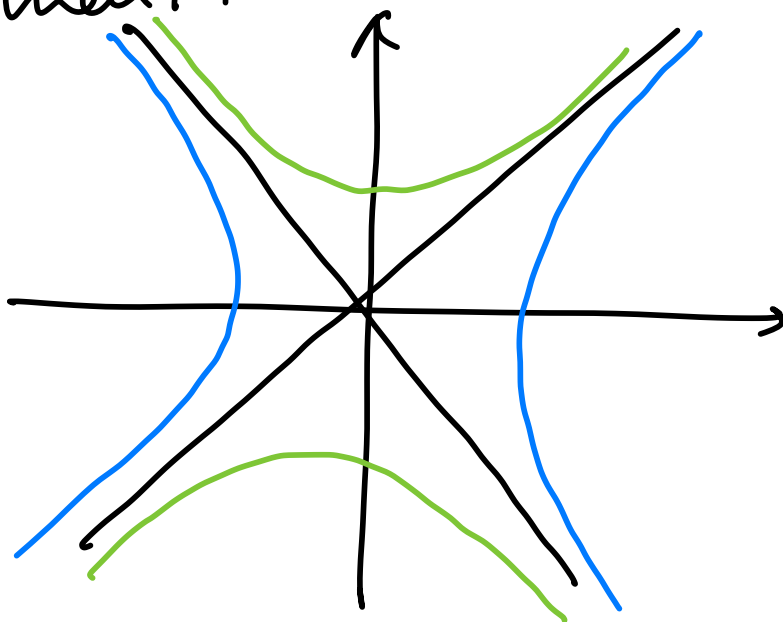


da $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (ha stessi asintoti)

Le $\mathcal{H}$ è un'iperbole avente
 semidistanza focale c e $a < c$,

allora definiamo la sua eccentricità
come $\frac{c}{a} > 1$.

Se $\frac{c}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a=b$ e l'iperbole
è detta equilatera. In questo
caso gli asintoti sono le bisettrici
dei quadranti



Data un'iperbole equilatera $\mathcal{H}$
di semiasse trasversa a , l'equazione
di $\mathcal{H}$ nel sistema di riferimento
che ha come assi cartesiani gli
asintoti di $\mathcal{H}$ è $xy = \frac{a^2}{2}$ ($y = \frac{1}{x} \cdot \frac{a^2}{2}$)

