EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Equazioni / disequazioni polinomiali

Sono equazioni / disequazioni del tipo:

$p(x) = 0$ (equazioni polinomiali)

$p(x) \geq 0, \; p(x) \leq 0, \; p(x) > 0, \; p(x) < 0$ (disequazioni polinomiali)

dove p è un polinomio:

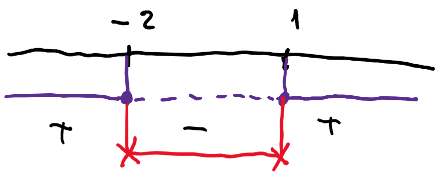
- Risolvere un'equazione polinomiale significa trovare le radici di $p(x)$.
- Per risolvere una disequazione:
  1) Si fattorizza p (se p ha grado ≥ 3)
  2) Si rappresenta il segno di p.
  3) Si scelgono le soluzioni a seconda del verso della disuguaglianza da risolvere

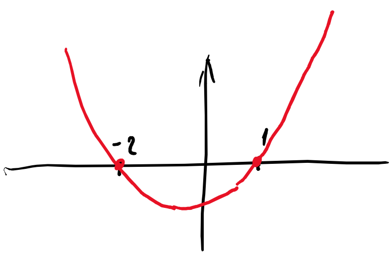
ESEMPI

1) $x^2 + x - 2 < 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$





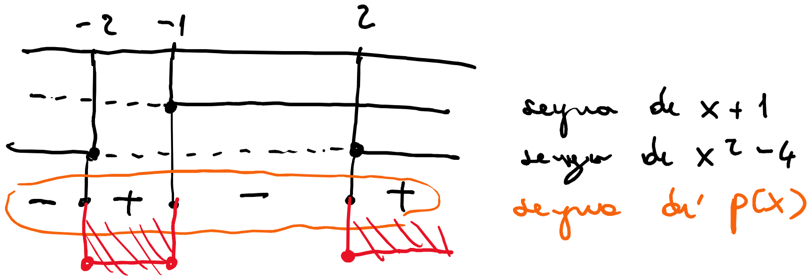
$-2 < x < 1$

Soluzioni: $x \in \mathbb{R}$ t.c. $-2 < x < 1$.

Insieme delle soluzioni: $]-2, 1[$

2) $(x+1)(x^2-4) \geq 0$

segno del polinomio:



$-2 \leq x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 2$

Insieme delle soluzioni: $[-2, 1] \cup [2, +\infty[$.

Equazioni e disequazioni razionali (o razionali fratte)

Sono equazioni / disequazioni in cui l'incognita x appare all'interno di un rapporto tra polinomi.

Per risolvere le equazioni razionali:

1) Condizioni di esistenza (denonominatori $\neq 0$)
2) Si risolve l'equazione
3) Si controlla se le soluzioni trovate sono compatibili con le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

1). c.e :

$x^2 - x \neq 0 \qquad x(x-1) \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq 1$

$x - 1 \neq 0 \longrightarrow x \neq 1$

$x \neq 0 \wedge x \neq 1$

OSS

$ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

$ab \neq 0 \iff \neg(ab = 0) \iff \neg(a = 0 \vee b = 0)$

$\iff a \neq 0 \wedge b \neq 0$

2) $$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

$$x+1 = \frac{2x}{x-1}(x^2-x)$$

$$x+1 = 2x^2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} \cancel{1} & \text{non soddisf le c.e.} \\ -\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

$\boxed{\text{Nota: si può moltiplicare per } x^2-x \text{ perché le c.e ci dicono che } x^2-x \neq 0}$

3) L'unica soluzione è $x = -\frac{1}{2}$

ESEMPIO 2

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

1) c.e. $x^2 - x + 1 \neq 0$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

Non ci sono c.e da imporre

2) $x^4 - x^3 - 2x = (1-x)(x^2 - x + 1)$

$$x^4 - \cancel{x^3} - \cancel{2x} = x^2 - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} + x^2 - \cancel{x}$$

$$x^4 = 2x^2 + 1$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = 1 + \sqrt{2} \quad \vee \quad t = 1 - \sqrt{2}$$

$$x^2 = \underbrace{1 + \sqrt{2}}_{>0} \quad \vee \quad x^2 = \underbrace{1 - \sqrt{2}}_{<0}$$

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \qquad \text{impossibile}$$

$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ sono le uniche soluzioni

Disequazioni razionali:

1) condizioni di esistenza
2) Si cerca di ricondurre la disequazione ad una disequazione del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \qquad \frac{p(x)}{q(x)} < 0 \ , \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \ , \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

3) Si studia il segno della frazione
4) Si scelgono le soluzioni in base al verso della disequazione da risolvere (partendo dalla disequazione trovata al punto 2)

ESEMPIO

$$\frac{1}{x^2-3} \leq 1$$

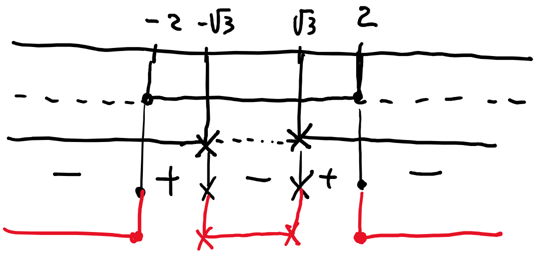
1) c.e: $x^2-3 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{3}$

2) $$\frac{1}{x^2-3} - 1 \le 0$$

$$\frac{1-(x^2-3)}{x^2-3} \le 0$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-3} \le 0$$

3) Studio del segno:



4)

$$x \le -2 \quad \lor \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \quad \lor \quad x \ge 2$$

Insieme delle soluzioni:

$$]-\infty, -2] \cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup [2, +\infty[$$

OSS Spesso le condizioni di esistenza si impongono direttamente durante lo studio del segno, purché non si svolgano prima operazioni che le modificano.

ESEMPIO

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x^2+5x+6} \le \frac{5}{x+3}$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2}{\underbrace{x^2+5x+6}_{(x+2)(x+3)}} - \frac{5}{x+3} \le 0$$

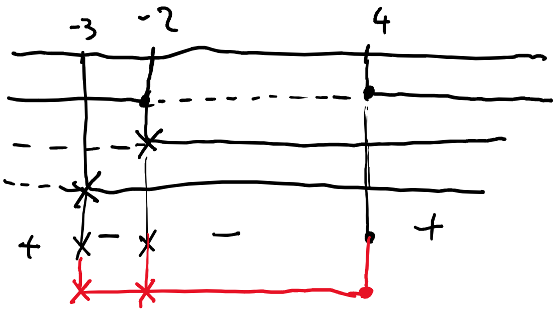
$$\frac{x(x+3) + 2 - 5(x+2)}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{x^2+3x+2-5x-10}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

Studio il segno della frazione

$x^2-2x-8=0 \iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$



segno di x^2-2x-8

(oppure $-3<x\le 4 \wedge x\neq -2$)

Soluzioni $-3 < x < -2 \quad \vee \quad -2 < x \le 4$

l'insieme delle soluzioni è

$]-3,-2[\, \cup \,]-2,4] =]-3,4] \setminus \{-2\}$

Nota: avremmo anche potuto semplificare

$$\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-4)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} \le 0$$

c.e. $x \neq -2$

Qui vanno imposte le c.e prima di semplificare

$$\frac{x-4}{x+3} \le 0$$

$-3 < x \le 4$

Con le c.e. ritroviamo: $-3 < x \le 4 \wedge x \neq -2$.

ESEMPIO

$$\frac{x+9}{x^2+3} \ge \frac{9x-10}{2x^2-1}$$

Notiamo che $x^2+3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi
si può moltiplicare per x^2+3
(non per $2x^2-1$)

$$x+9 \geq \frac{9x-10}{2x^2-1}(x^2+3)$$

$$x+9-\frac{(9x-10)(x^2+3)}{2x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{(x+9)(2x^2-1)-(9x-10)(x^2+3)}{2x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{2x^3+18x^2-x-9-(9x^3-10x^2+27x-30)}{2x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{-7x^3+28x^2-28x+21}{2x^2-1} \geq 0$$

$$\frac{x^3-4x^2+4x-3}{2x^2-1} \leq 0$$

$p(x) = x^3-4x^2+4x-3$

Possibili radici razionali: ± 1 o ± 3

$p(3) = 27-36+12-3 = 0$

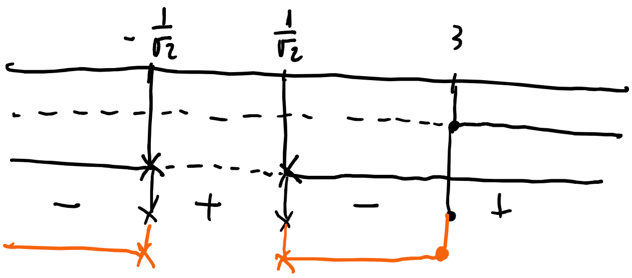
$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -4 & 4 & -3 \\
3 & & 3 & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

$p(x) = (x-3)(x^2-x+1)$

$$\frac{(x-3)\overbrace{(x^2-x+1)}^{\Delta<0}}{2x^2-1} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{2x^2-1} \leq 0$$

Siccome $x^2-x+1 > 0$ si può dividere per questo polinomio



$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 3$$

ESEMPIO

$$\frac{5x^4+14x^2-3}{1-3x} > 0$$

Se $t = x^2$

$$5x^4+14x^2-3 = 5t^2+14t-3$$

$$t_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49+15}}{5} = \frac{-7\pm 8}{5} \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -3 \end{cases}$$

$$5x^2+14x^2-3 = 5t^2+14t-3$$

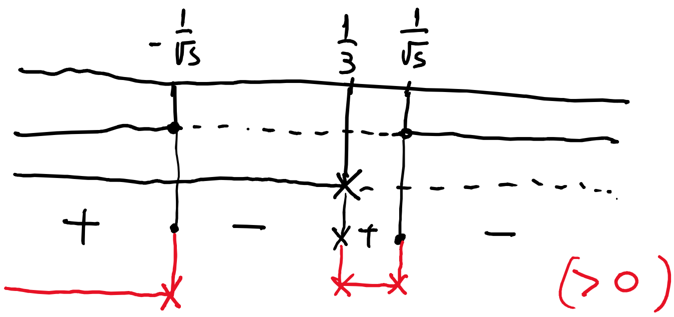
$$= 5\left(t-\frac{1}{5}\right)(t+3)$$

$$= 5\left(x^2-\frac{1}{5}\right)(x^2+3)$$

$$\frac{\cancel{5}\left(x^2-\frac{1}{5}\right)\cancel{(x^2+3)}}{1-3x} > 0$$

Si può dividere per x^2+3 perché $x^2+3>0$

$$\frac{x^2-\frac{1}{5}}{1-3x} > 0$$



Soluzioni $x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$

Nota si può anche rappresentare direttamente il segno del numeratore:

$$5x^4 + 14x^2 - 3 \geq 0$$

$$5t^2 + 14t - 3 \geq 0$$

$$t \geq \frac{1}{5} \quad \vee \quad t \leq -3$$

$$x^2 \geq \frac{1}{5} \quad \vee \quad \cancel{x^2 \leq -3} \quad \text{impossibile}$$

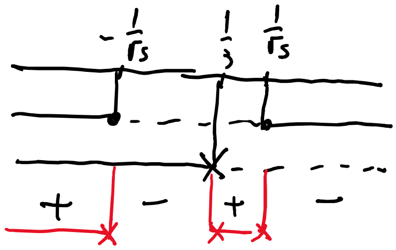
$$x^2 \geq \frac{1}{5}$$

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Segno del numeratore:

Segno della frazione

$$\frac{5x^4 + 14x^2 - 3}{1 - 3x}$$



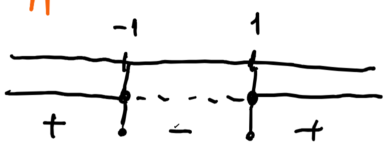
numeratore

Ritrovo $\quad x < -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad \frac{1}{3} < x < \frac{1}{\sqrt{5}}$

Attenzione: Non confondere la rappresentazione del segno con la rappresentazione delle soluzioni

$$p(x) = x^2 - 1$$

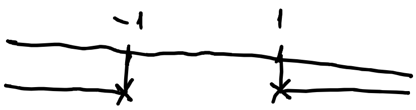
- Rappresentazione del segno di p



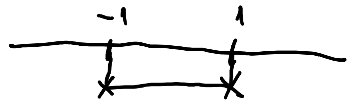
- Rappresentazione delle soluzioni di $p(x) > 0$

Si risolve la disequazione $\quad x^2 - 1 > 0$

che ha come soluzioni $\quad x > 1 \ \vee \ x < -1$



- Rappresentazioni delle soluzioni di $p(x)<0$

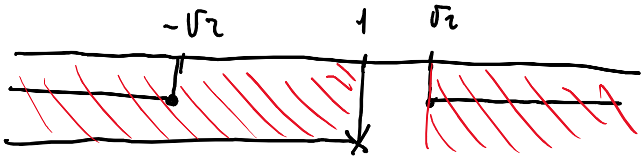


Unione di soluzioni di più disequazioni

disequazione 1 $\vee$ disequazione 2

$$x^2 - 2 \geq 0 \quad \vee \quad x < 1$$

$$(x \geq \sqrt{2} \ \vee \ x \leq -\sqrt{2}) \quad \vee \quad x < 1$$



$$x < 1 \quad \vee \quad x \geq \sqrt{2}$$

Sistemi di disequazioni / intersezione di soluzioni

$$\begin{cases} \text{disequazione 1} \\ \text{disequazione 2} \\ \text{disequazione 3} \\ \vdots \end{cases}$$

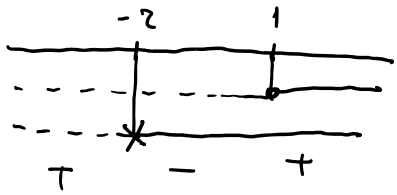
Per risolvere il sistema:

Si risolvono le singole disequazioni e si intersecano le soluzioni cioè si prendono le regioni comuni di tutti gli insiemi delle soluzioni

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} \geq 0 & (1) \\ x^2-3<0 & (2) \end{cases}$$

Prima si risolvono separatamente (1) e (2) e poi si intersecano le soluzioni

(1) 

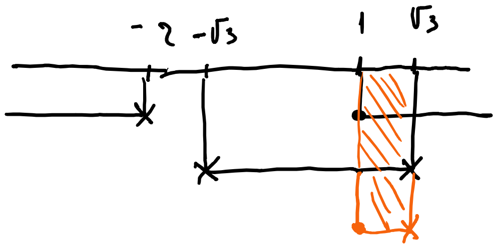
Soluzioni di (1):

$x<-2 \quad \lor \quad x \geq 1$

(2) $x^2-3<0 \iff -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

Il sistema si riscrive come

$$\begin{cases} x<-2 \quad \lor \quad x \geq 1 \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases}$$



Soluzioni del sistema:

$1 \leq x < \sqrt{3}$

- In un sistema, spesso si può usare una disequazione per semplificare la risoluzione di un'altra e semplificare i conti

ESEMPIO

si può dividere per x perché $x>0$ per via della seconda disequazione

$$\begin{cases} x^3-x>0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-1>0 \\ x>0 \end{cases}$$

(anche se $x^3-x \not\Leftrightarrow x^2-1>0$)

$$\begin{cases} x > 1 \quad \vee \; x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$x > 1$