POLINOMI DI UNA VARIABILE

Sono espressioni della forma:

$p(x)\ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Se $a_n \neq 0$ si dice che il polinomio ha GRADO n (e si scrive $\deg(p) = n$).

L'insieme dei polinomi con coefficienti reali di variabile x si indica con $\mathbb{R}[x]$.

OSS

$\deg(p)$ non è definito se $p(x) = 0$

$(0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^{100})$

OSS

Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, allora:

$\deg(p_1 \cdot p_2) = \deg p_1 + \deg p_2$.

Def Siano $a, b \in \mathbb{R}[x]$ si dice che $b(x)$ DIVIDE $a(x)$ se $\exists\, q \in \mathbb{R}[x]$ tale che $a(x) = b(x)\, q(x)$. (si scrive $b(x) \mid a(x)$).

ESEMPI

- $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ quindi:

- $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ quindi:

  $x+2 \mid x^2-4$ e $x-2 \mid x^2-4$

- $x(x^3 - 7x + 2) = x^4 - 7x^2 + 2x$

  quindi: $x \mid x^4 - 7x^2 + 2x$ e

  $x^3 - 7x + 2 \mid x^4 - 7x^2 + 2x$.

TEOREMA (DI DIVISIONE EUCLIDEA TRA POLINOMI)

Siano $a, b \in \mathbb{R}[X]$ allora $\exists!\ q, r \in \mathbb{R}[X]$ tali che:

1) $a(x) = b(x)\,q(x) + r(x)$
2) $r(x) = 0$ oppure $\deg(r) < \deg b$

ESEMPIO

$a(x) = 5x^3 - 3$

$b(x) = x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +\,0\cdot x^2 & +\,0\cdot x & -\,3 & x^2 + x + 1 \\
\cline{5-5}
5x^3 & +\,5x^2 & +\,5x & & \underbrace{5x - 5}_{q(x)} \\
\cline{1-4}
// & -5x^2 & -5x & -3 & \\
 & -5x^2 & -5x & -5 & \\
\cline{2-4}
 & // & // & \underbrace{2}_{r(x)} &
\end{array}
$$

$q(x) = 5x - 5$

$r(x) = 2$

Si può verificare infatti che

$$5x^3-3 = (x^2+x+1)(5x-5) + 2$$

OSS

Il procedimento che abbiamo descritto funziona quando $\deg a \geq \deg b$

Se invece $\deg a < \deg b$ la divisione da come risultato banale $q(x) = 0$, $r(x) = a(x)$

Infatti $a(x) = b(x) \cdot 0 + a(x)$

ESEMPIO

$$a(x) = x^6 + 2 \quad , \quad b(x) = x^3 + x$$

$$\begin{array}{ccccccc|l}
x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & x^3 + x \\
x^6 & & +x^4 & & & & & \hline \\
\hline
 & & -x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +2 & \underbrace{x^3 - x}_{q(x)} \\
 & & -x^4 & & -x^2 & & & \\
\hline
 & & & & \multicolumn{3}{l}{\underbrace{x^2 + 0 \cdot x + 2}_{r(x)}} &
\end{array}$$

Quindi:

$$q(x) = x^3 - x \quad , \quad r(x) = x^2 + 2$$

OSS Siano $a, b \in \mathbb{R}[X]$ allora $b(x) \mid a(x)$

$\Longleftrightarrow$ il resto della divisione di a per b è 0 (il polinomio nullo)

CASO SPECIALE: divisione per $b(x) = x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $b(x) = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ allora la divisione tra $a(x)$ e $b(x)$ si può fare utilizzando la REGOLA DI RUFFINI

ESEMPIO

$a(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ $\quad (= x^3 + 3x^2 + 0x - 4)$

$b(x) = x - 1$ $\quad \alpha = 1$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 0
\end{array}
$$

coefficienti di $q(x)$:

resto $r(x) = 0$

$q(x) = x^2 + 4x + 4$

TEOREMA DEL RESTO

Sia $p \in \mathbb{R}[X]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora il resto della divisione di $p(x)$ per $x - \alpha$ è uguale a $\underbrace{p(\alpha)}_{\text{numero reale che si ottiene sostituendo } \alpha \text{ al posto di } x}$

ESEMPIO

$$p(x) = x^3 + 3x - 4$$

Il resto della divisione per $x-1$ è

$p(1) = 1^3 + 3\cdot 1 - 4 = 1+3-4 = 0$ (quindi $x-1 \mid p(x)$)

Il resto della divisione per $x-2$ è

$p(2) = 8 + 6 - 4 = 10$

Il resto della divisione per $x+2 = x-(\underbrace{-2}_{\alpha})$ è

$p(-2) = -8 - 6 - 4 = -18$

TEOREMA DI RUFFINI

Sia $p \in \mathbb{R}[X]$. Allora $p(x)$ è divisibile per $x-\alpha \iff p(\alpha) = 0$

$(x-\alpha \mid p(x))$

Def Sia $p \in \mathbb{R}[X]$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dice che α è una RADICE (oppure uno ZERO) di $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$.

Come si trovano le radici di un polinomio?

Dipende dal grado:

1) Se $\deg p = 1$ allora

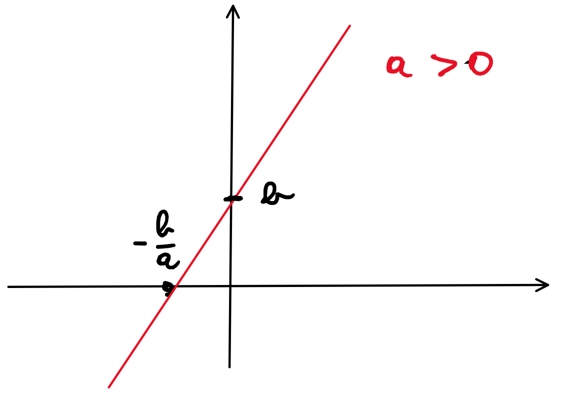
$p(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

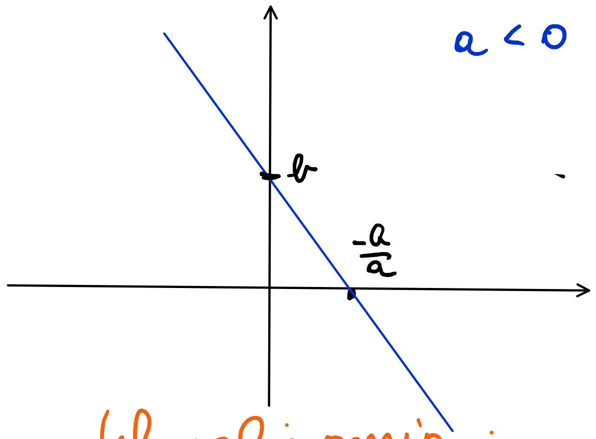
$$p(x) = 0 \iff ax + b = 0$$
$$\iff ax = -b$$
$$\iff x = -\frac{b}{a}$$

L'unica radice è $\alpha = -\frac{b}{a}$

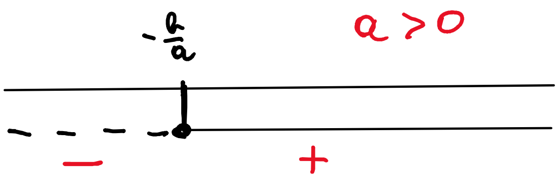
Rappresentazione grafica

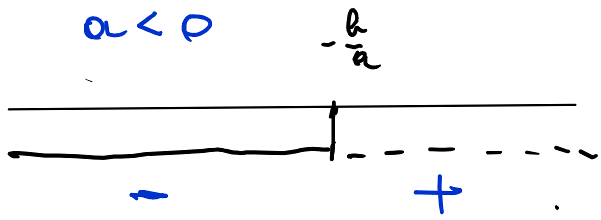
L'equazione $y = ax + b$ rappresenta una retta





Rappresentazione del segno del polinomio:





---

2) Se $\deg p = 2$ allora

$p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

L'esistenza delle radici dipende dal

DISCRIMINANTE $\Delta = b^2 - 4ac$

- Se $\Delta < 0$ il polinomio non ha radici (reali)
- $\Delta = 0$ ha una sola radice $-\frac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$ due radici $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

DIM

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$\cancel{a}\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a} x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ no soluzioni.
- $\Delta = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = 0$

  $\iff x = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

da cui $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Fatti da ricordare sui polinomi di secondo grado

1) $a x^2 + b x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Se $a > 0$ allora $p(x) = \left(\sqrt{a}\, x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$

Se $a < 0$ allora $p(x) = -\left(\sqrt{|a|}\, x + \frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2$

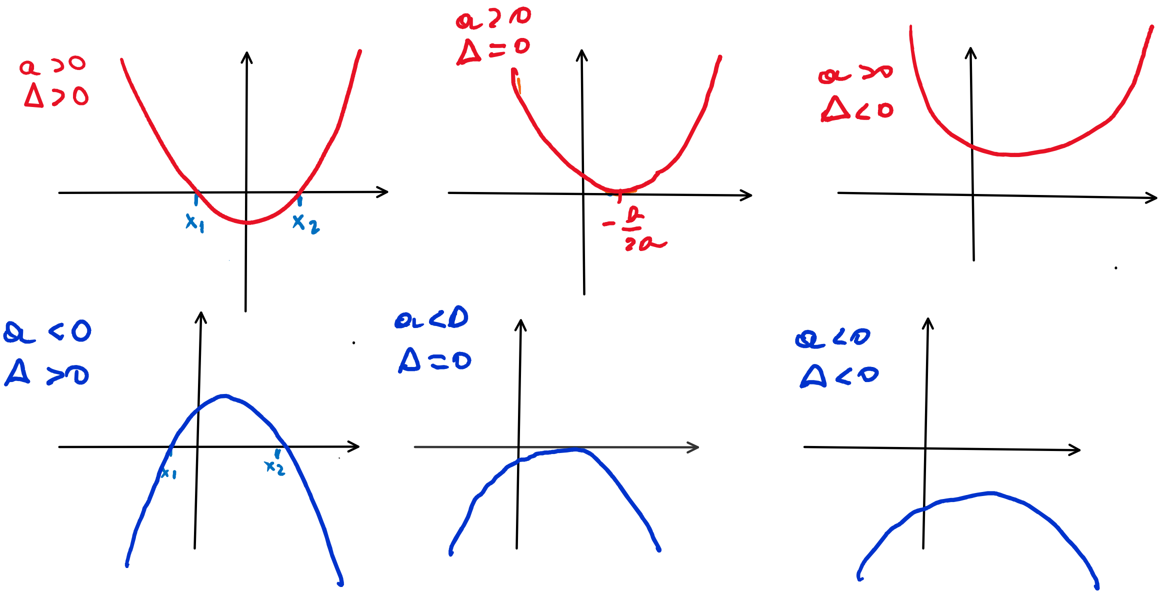
3) Se $\Delta < 0$, $p(x)$ ha sempre lo stesso segno di a

4) Se $\Delta > 0$: FORMULA RIDOTTA per le radici:

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

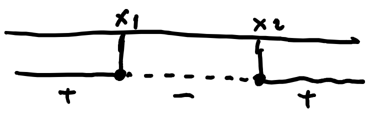
$$= \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$ (utile se $b \in \mathbb{Z}$ è pari)

5) Possibili grafici dei polinomi di secondo grado:

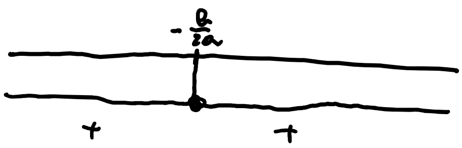


6) Segno di un polinomio di secondo grado

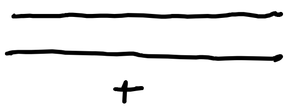
- $a > 0$, $\Delta > 0$



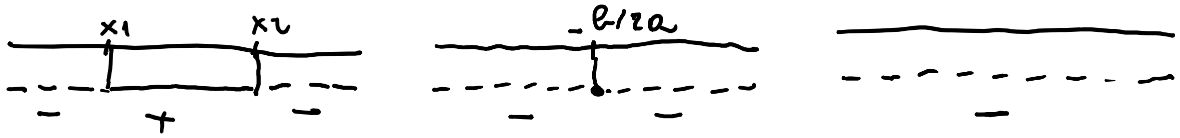
- $a > 0$, $\Delta = 0$



- $a > 0$, $\Delta < 0$



• $a<0, \Delta>0$ • $a<0, \Delta=0$ • $a<0, \Delta<0$



3) $\deg p \geq 3$

Come si trovano le radici?

ESEMPIO

$$p(x) = 3x^3 - 13x^2 - 8x + 4$$

Notiamo che

$$p\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} - \frac{13}{9} - \frac{8}{3} + 4$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{13}{9} - \frac{8}{3} + 4$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 4 = 0$$

$\frac{1}{3}$ è una radice di $p(x)$

Possiamo usare la regola di Ruffini per scrivere $p(x)$ come prodotto di $x - \frac{1}{3}$ per un polinomio di grado 2:

	3	−13	−8	4
$\frac{1}{3}$		1	−4	−4
	3	−12	−12	0

$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 12x - 12\right)$$

$$= 3\left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(x^2 - 4x - 4\right)$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{1}$$
$$= 2 \pm \sqrt{8}$$

Le radici di $p(x)$ sono $\frac{1}{3}$ e $2 \pm \sqrt{8}$

Perché all'inizio abbiamo scelto $\frac{1}{3}$?

TEOREMA. Sia $p(x) = a_n x^n + \dots\dots + a_1 x + a_0$
dove $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \boxed{\in \mathbb{Z}}$
Se $\boxed{q \in \mathbb{Q}}$ è una radice di $p(x)$ allora
q si può scrivere nella forma $q = \frac{a}{b}$
dove $a \mid a_0$ e $b \mid a_n$

Nell'esempio precedente:

$$p(x) = 3x^3 - 13x^2 - 8x + 4$$

Se c'è una radice razionale allora deve
essere una frazione $\frac{a}{b}$ dove

a è un divisore di 4 $(\pm 1, \pm 2, \pm 4)$

b è un divisore di 3 $(\pm 1, \pm 3)$

Le possibili radici razionali di $p(x)$ sono

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4 \quad \pm \frac{1}{3} \quad \pm \frac{2}{3} \quad \pm \frac{4}{3}$

ESEMPIO 2

$$p(x) = \underbrace{x^4}_{1 \cdot x^4} + x^3 - 4x^2 + x + 1$$

Uniche possibili radici razionali sono ± 1

$$p(1) = 1 + 1 - 4 + 1 + 1 = 0$$

Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
1 & & 1 & 2 & -2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0
\end{array}$$

$$p(x) = (x-1)\underbrace{(x^3 + 2x^2 - 2x - 1)}_{q(x)}$$

$$q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$

$$q(1) = 1 + 2 - 2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 2 & -2 & -1 \\
1 & & 1 & 3 & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 0
\end{array}$$

$$q(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)$$

$$p(x) = (x-1)\,q(x)$$
$$= (x-1)^2 (x^2 + 3x + 1)$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Le radici di $p(x)$ sono 1 e $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Si noti che

$$p(x) = (x-1)^2 (x^2+3x+1)$$
$$= (x-1)^2 \left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Def: Sia $p(x) \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice di $p(x)$. Si definisce MOLTEPLICITÀ DI α il più grande $m \in \mathbb{N}$ tale che $(x-\alpha)^m \mid p(x)$

Nell'esempio precedente:

1 è una radice di molteplicità 2

$-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ sono radici di molteplicità 1 (RADICI SEMPLICI di p).

OSS

- $p(x) = ax^2 + bx + c$ se $\Delta > 0$:
  $= a(x-x_1)(x-x_2)$ dove x_1, x_2 sono le radici di $p(x)$

  Se $\Delta > 0$, $x_1 \neq x_2$ e sono radici semplici.

- Se $p(x) = ax^2+bx+c$ e $\Delta = 0$ allora $p(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. $\alpha = -\frac{b}{2a}$ è una radice di molteplicità 2.

- Non sempre cercare le radici razionali di un polinomio è il modo più rapido per scriverlo come prodotto scrivendo come prodotto

ESEMPIO

$$p(x) = x^{10} - 4x^6$$
$$= x^6(x^4-4)$$
$$= x^6(x^2-2)(x^2+2)$$
$$= x^6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$$

0 è una radice di p di molteplicità 6

$\pm\sqrt{2}$ sono radici semplici di p

ESEMPIO 2

$$p(x) = x^6 + x^3 - 2$$
$$= (x^3)^2 + x^3 - 2$$

Per cercare le radici si può fare una sostituzione: $t = x^3$

$$x^6 + x^3 - 2 = 0$$
$$t^2 + t - 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$
$$t = 1 \quad \vee \quad t = -2$$

$$x^3 = 1 \quad \vee \quad x^3 = -2$$
$$x = \sqrt[3]{1} \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{-2}$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = -\sqrt[3]{2}$$

OSS la sostituzione permette anche di trovare le molteplicità:

$$x^6 + x^3 - 2 = t^2 + t - 2$$
$$= (t-1)(t+2)$$
$$= (x^3 - 1)(x^3 + 2)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$$

1 e $-\sqrt[3]{2}$ sono radici semplici di $p(x)$

<u>Def</u>: Sia $p(x) \in \mathbb{R}[X]$. Si dice che $p(x)$ è RIDUCIBILE in $\mathbb{R}[X]$ se $\exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tali che $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$ e $0 < \deg p_1 < \deg p$, $0 < \deg p_2 < \deg p$.

Un polinomio si dice IRRIDUCIBILE in $\mathbb{R}[X]$ se non è riducibile.

- un polinomio di grado 1 è sempre irriducibile
- Un polinomio di grado 2 è riducibile $\iff \Delta \geq 0$.

E i polinomi di grado ≥ 3? sono sempre riducibili!

TEOREMA (DI FATTORIZZAZIONE in $\mathbb{R}[X]$)

Se $p(x) \in \mathbb{R}[X]$ e $\deg p \geq 3$, allora p è riducibile e può essere scritto come prodotto di polinomi irriducibili (cioè polinomi di grado 1 o di grado 2 con $\Delta < 0$).

Questo teorema dice che è sempre possibile scrivere $p(x)$ come prodotto di polinomi di grado 1 o 2. Questa fattorizzazione permette di sempre di determinare le radici di $p(x)$

Nota Ci sono molti esempi di polinomi riducibili che non hanno radici reali.

- $(x^2+1)(x^2+x+1)$ è riducibile ma non ha radici
- x^4+1 non ha radici reali
  (infatti $x^4+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$
$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

OSS

- Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale
- i polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ hanno lo stesso ruolo dei numeri primi in $\mathbb{Z}$.