PRECORSO 3

giovedì 11 settembre 2025 09:02

Allineamenti decimali

Def: Sia $S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Un **ALLINEAMENTO DECIMALE** è una scrittura del tipo

$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, d_1 d_2 d_3 \dots$ dove $n \in \mathbb{N}$ e

$a_0, a_1, \dots, a_n, d_1, d_2, d_3 \dots \in S$

1, 2 3 7 5 4 . . . . . .

2 4 3 1 , 2 4 1 7 3 . . . . . .

Def: Un allineamento decimale $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, d_1 d_2 \dots$ si dice **FINITO** se $\exists M \in \mathbb{N}$ t.c. $d_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, j \geq M+1$.

In tal caso gli infiniti zeri con cui termina l'allineamento si possono omettere

Si scrive $0,72$ invece di $0,72000000000\dots$

Ogni allineamento finito corrisponde ad un numero razionale:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, d_1 \dots d_M$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_M}{10^M}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k + \sum_{k=1}^{M} \frac{d_k}{10^k} \in \mathbb{Q}$$

Si può dimostrare che ad ogni allineamento
$a_n \dots a_1 a_0 , d_1 d_2 \dots$ corrisponde

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}}_{\text{è un numero reale non necessariamente razionale.}} \; ?$$

A ogni numero razionale si può associare un allineamento tramite la divisione decimale:

- $\frac{1}{3} = 0{,}3333\dots = 0{,}\overline{3}$
- $\frac{9}{50} = 0{,}18$
- $\frac{4}{33}$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 33 \\ \hline 0 & 0{,}12121212\dots \\ \cline{1-1} 40 & \\ 33 & \\ \cline{1-1} 70 & \\ 66 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

$\frac{4}{33} = 0{,}121212\dots = 0{,}\overline{12}$

TEOREMA

La divisione decimale associa (a meno del segno) ad ogni numero razionale un allineamento decimale che può essere solo:

1) finito

2) PERIODICO SEMPLICE cioè del tipo

$$a_m \dots a_1 a_0, \underbrace{\overline{p_1 \dots p_s}}_{\text{PERIODO}} = a_m \dots a_0, p_1 p_2 \dots p_s p_1 p_2 \dots p_s \dots$$

3) PERIODICO MISTO cioè del tipo

$$a_m \dots a_1 a_0, \underbrace{d_1 \dots d_M}_{\text{ANTIPERIODO}} \underbrace{\overline{p_1 \dots p_s}}_{\text{PERIODO}}$$

$0,01001000100001 \dots \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ perché è un allineamento decimale che non rientra nei tipi 1), 2), 3)

PROPOSIZIONE 1

Sia $s \in \mathbb{N}, s \geq 1$ e $p_1, \dots, p_s \in S = \{0, \dots, 9\}$ allora

$$0, \overline{p_1 \dots p_s} = \frac{p_1 \dots p_s}{\underbrace{99 \dots 9}_{s \text{ volte}}} = \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

Più in generale:

$$a_m \dots a_1 a_0, \overline{p_1 \dots p_s} = \frac{a_m \dots a_1 a_0 p_1 \dots p_s - a_m \dots a_1 a_0}{10^s - 1}$$

DIM

Prima parte: $0, \overline{p_1 \dots p_s}$. Sia $x = 0, \overline{p_1 \dots p_s}$

$$x \cdot 10^s = p_1 \dots p_s, \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= p_1 \dots p_s + x$$

$$x \cdot 10^s = p_1 \dots p_s + x$$

$$x \cdot 10^s - x = p_1 \dots p_s$$

$$x(10^s - 1) = p_1 \dots p_s$$

$$x = \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1}.$$

Seconda parte:

$$a_n \dots a_1 a_0 , \overline{p_1 \dots p_s} = a_n \dots a_1 a_0 + 0,\overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= a_n \dots a_1 a_0 + \frac{p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$= \frac{\underbrace{a_n \dots a_1 a_0} \cdot (10^s - 1) + p_1 \dots p_s}{10^s - 1}$$

$$= \frac{\underbrace{a_n \dots a_1 a_0} \cdot 10^s - \underbrace{a_n \dots a_1 a_0} + \underbrace{p_1 \dots p_s}}{10^s - 1}$$

$$= \frac{\underbrace{a_n \dots a_1 a_0 \overbrace{00 \dots 0}^{s \text{ volte}} + p_1 \dots p_s} - \underbrace{a_n \dots a_1 a_0}}{10^s - 1}$$

$$= \frac{\underbrace{a_n \dots a_1 a_0 p_1 \dots p_s} - \underbrace{a_n \dots a_1 a_0}}{10^s - 1}.$$

ESEMPIO

- $0,\overline{28} = \dfrac{28}{99}$
- $1,\overline{28} = \dfrac{128 - 1}{99} = \dfrac{127}{99}$
- $10,\overline{02} = \dfrac{1002 - 10}{99} = \dfrac{992}{99}$

PROPOSIZIONE 2

$$a_n \dots a_1 a_0, d_1 \dots d_M \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= \frac{a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M p_1 \dots p_s - a_n \dots a_0 d_1 \dots d_M}{(\underbrace{10^s - 1}_{9\dots 9 \text{ s volte}}) \cdot 10^M}$$

DIM (esercizio)

Sia $x = a_n \dots a_1 a_0, d_1 \dots d_M \overline{p_1 \dots p_s}$. Allora

$$x \cdot 10^M = a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M, \overline{p_1 \dots p_s}$$

$$= \frac{a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M p_1 \dots p_s - a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M}{(10^s - 1)}$$

Quindi

$$x = \frac{a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M p_1 \dots p_s - a_n \dots a_1 a_0 d_1 \dots d_M}{(10^s - 1) \cdot 10^M}$$

- $0,7\overline{12} = \frac{712 - 7}{990} = \frac{705}{990}$
- $2,12\overline{3} = \frac{2123 - 212}{900} = \frac{1911}{900}$

Attenzione: Allineamenti decimali diversi possono corrispondere allo stesso numero

Ad esempio: $0,\bar{9} = 1$

$$\left(0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1 \right)$$

Questa particolarità capita solo per gli allineamenti che terminano con infiniti 9

E i numeri irrazionali? hanno un allineamento infinito e non periodico (né semplice, né misto)

$0,01001000100001\ldots$

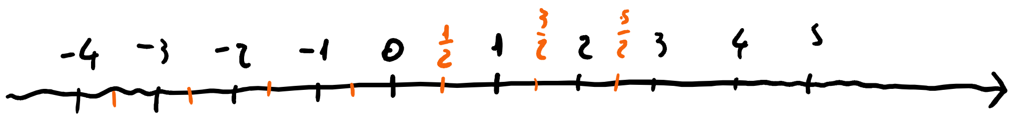
$\pi = 3,141592\ldots$

$e = 2,71828\ldots$

$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$

Ultime considerazioni sui numeri reali

- I numeri reali sono ordinati.
- I numeri reali si possono rappresentare su una retta



Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che I è un **INTERVALLO** se $\forall\, x, y \in I$ e $\forall\, z \in \mathbb{R}$:

$x < z < y \Rightarrow z \in I.$

Si può dimostrare che gli intervalli sono tutti del tipo:

1) $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b

2) $]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b (indicato anche con (a, b))

3) $]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ (indicato anche con $(a, b]$)

4) $[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ (indicato anche con $[a, b)$)

5) $[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$ SEMIRETTA DESTRA CHIUSA DI ESTREMO a

6) $]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$ SEMIRETTA DESTRA APERTA DI ESTREMO a (indicato anche con $(a, +\infty)$)

7) $]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$ SEMIRETTA SINISTRA CHIUSA DI ESTREMO b

8) $]-\infty, a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$ SEMIRETTA SINISTRA APERTA DI ESTREMO b (indicato anche con $(-\infty, a)$)

9) $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (indicato anche con $(-\infty, +\infty)$)

10) $\emptyset$

POTENZE

- Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}$ si definisce

$$x^n = \begin{cases} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \ (n \text{ volte}) & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{1}{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x} \ (n \text{ volte}) & \text{se } n \in \mathbb{Z}, n < 0. \end{cases}$$

Se $n > 0$ si può definire $0^n = 0$.

Attenzione 0^n non è definito se $n \leq 0$

TEOREMA Siano $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Se n è dispari: $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$
2) Se n è pari e $y \geq 0$: $\exists!\, x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ tale che $x^n = y$
3) Se n è pari e $y < 0$: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$.

Def: Nei casi 1) e 2) il numero reale x si dice RADICE ENNESIMA (O RADICE n-ESIMA / RADICE DI INDICE n) di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$

$\sqrt{y}$ radice quadrata

$\sqrt[3]{y}$ radice cubica

$\sqrt[4]{y}$ radice quarta

$\vdots$ $\vdots$

$\sqrt[n]{y}$ radice n-esima

RICORDARE

- Se n è dispari: $\sqrt[n]{y}$ è sempre definita e $\sqrt[n]{y}$ ha lo stesso segno di y.

Inoltre: $x^n = y \iff x = \sqrt[n]{y}$

• Se n è pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo se $y \geq 0$ e $\sqrt[n]{y} \geq 0$. Inoltre:

$$x^n = y \iff x^n = y \wedge y \geq 0$$
$$\iff x = \pm\sqrt[n]{y} \wedge y \geq 0.$$

Def Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e sia $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. Definiamo

$$x^q = \sqrt[m]{x^n}$$

Se $n > 0$, si definisce anche $0^q = 0$

Attenzione: Se $x < 0$ non è ben definito x^q

Ad esempio:
$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$
$$\parallel$$
$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad ?!$$

Si può scrivere $\sqrt[3]{-1}$ ma non $(-1)^{\frac{1}{3}}$.

Si può però dire che
$$\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1^{\frac{1}{3}} = -1$$
$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -2^{\frac{1}{3}} \quad \left(\text{non } \cancel{(-2)}^{\frac{1}{3}}\right)$$

- Come si definiscono le potenze x^α se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? (2^π ?)

  Vedremo in analisi 1 che se $x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è possibile definire x^α utilizzando l'assioma di Dedekind.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha_1+\alpha_2} = x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\left(x^{\alpha_1}\right)^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \left(x^{\alpha_2}\right)^{\alpha_1}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x>0$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$x^{\alpha_1-\alpha_2} = \frac{x^{\alpha_1}}{x^{\alpha_2}}$$

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y>0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$$

e $$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

6) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0$: $x^0 = 1$ e $x^1 = x$.

ESEMPI

1) $$\frac{(3^2 \cdot 5^3)^5}{5^{15}} = \frac{(3^2)^5 \cdot (5^3)^5}{5^{15}} = \frac{3^{10} \cdot \cancel{5^{15}}}{\cancel{5^{15}}}$$
$$= 3^{10}$$

2) $$2^8\, 6^{-4} \cdot 3^2 = 2^8\, (2 \cdot 3)^{-4} \cdot 3^2$$
$$= 2^8 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2$$
$$= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}$$

3) $$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$$
$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

OSS Se $x, y > 0$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Attenzione

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$
$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$

Mai scrivere l'uguale!

$(x+y)^n \neq x^n + y^n$ $\boxed{\text{e uguali .}}$

Potenze di un binomio:

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

I coefficienti si determinano tramite il TRIANGOLO DI TARTAGLIA

1	$(x+y)^2 = 1$
1 1	$(x+y)^1 = x+y$
1 2 1	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
1 3 3 1	$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2$
1 4 6 4 1	$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^{n-k} y^k \quad \text{dove}$$

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

OSS

Sia $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{se } n \text{ è dispari} \\ |x| & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

Polinomi

Def Un MONOMIO (REALE) è un'espressione che coinvolge un coefficiente reale e una potenza o un prodotto di potenze di variabili con esponente naturale

$2xy$

$7x^2yz$

$-3x^7$

πxyz

$3 = 3x^0$

$\cancel{x\,y^{\frac{1}{2}}}$

Def: Un POLINOMIO A COEFFICIENTI REALI è un espressione costituita da un singolo monomio (reale) o dalla somma di più monomi (reali).

ESEMPI

$$5xy + z^7 + \pi x$$

$$7xy - \sqrt{2}\,x$$

Formule utili:

- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ &= (x-y)(x+y)(x^2+y^2) \\ &= (x-y)(x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3) \end{aligned}$$
- $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4)$
- In generale, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k$$

- $$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
- $$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = {} & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ & + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_1x_n \\ & + 2x_2x_3 + \dots \qquad + x_2x_n \\ & + \dots \end{aligned}$$