PRECORSO 2

mercoledì 10 settembre 2025 10:44

I numeri reali sono un insieme in cui:

- Sono fissati due elementi $0, 1 \in \mathbb{R}$ con $0 \neq 1$
- sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$
- Esiste un ordinamento ($\leq$)
- Valgono le seguenti proprietà:

1) L'operazione $+$ soddisfa:

1.1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ (PROP. ASSOCIATIVA)

1.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a + b = b + a$ (PROP. COMMUTATIVA)

1.3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a + 0 = a$ (0 È L'ELEMENTO NEUTRO PER +)

1.4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \ b \in \mathbb{R}: a + b = 0$. ($\exists$ L'OPPOSTO DI OGNI ELEMENTO)

2) L'operazione $\cdot$ soddisfa:

2.1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (PROP. ASSOCIATIVA DI $\cdot$)

2.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$ (PROP. COMMUTATIVA DI $\cdot$)

2.3) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = a$ (1 È ELEMENTO NEUTRO DI $\cdot$)

2.4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \ b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = 1$. (ESISTENZA DEL RECIPROCO)

2.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (PROP. DISTRIBUTIVA)

3) La relazione $\leq$ soddisfa:

3.1) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \leq a$ (PROP. RIFLESSIVA)

3.2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \ \wedge \ b \leq a \Rightarrow a = b$ (PROP. ANTISIMMETRICA)

3.3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \ \wedge \ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (PROP. TRANSITIVA)

3.4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \ \vee \ b \leq a$. (PROP. TOTALE)

3.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON +)

3.6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ (COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON $\cdot$)

4) Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che:
$\forall a \in A, b \in B: \quad a \leq b$. Allora $\exists \ c \in \mathbb{R}$ t.c.
$\forall a \in A, b \in B: \quad a \leq c \ \wedge \ c \leq b$.

Commenti:

- La proprietà 4) è nota anche come ASSIOMA DI COMPLETEZZA o come ASSIOMA DI DEDEKIND.

- $a \cdot b$ indica il prodotto tra a e b
  Spesso per brevità si scrive ab invece di $a \cdot b$
  (se questo non crea confusione con altre notazioni)

In $\mathbb{R}$ abbiamo 0 e 1 e sappiamo fare le addizioni. Possiamo introdurre in maniera ricorsiva gli altri numeri naturali:

$2 := 1+1$
$3 := 2+1$
$4 := 3+1$
$5 := 4+1$
$\vdots$

(Nota: il simbolo $:=$ si usa per definire un nuovo simbolo)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Si dice che A è INDUTTIVO se:

1) $0 \in A$
2) $\forall x \in A : x+1 \in A$.

Def: L'insieme dei numeri naturali è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$, cioè è l'intersezione tra tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$

oss

Sia $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n+1$

Si può verificare che $(\mathbb{N}, 0, s)$ soddisfa gli assiomi di Peano.

Def Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si dice che n è un NUMERO PRIMO se $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$: $n = a\,b \Rightarrow a = 1 \vee b = 1$.

2 3 5 7 11 13 17 ......

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

Ogni numero naturale $n \geq 2$ o è primo o può essere scritto in modo unico come prodotto di numeri primi. Cioè:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ $\exists!\, K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_1, \dots, p_K$ primi distinti e $a_1, \dots, a_K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_K^{a_K} \quad (\text{FATTORIZZAZIONE DI } n)$$

ESEMPI

- $n = 24 = 2^3 \cdot 3$
- $n = 104 = 2 \cdot 52 = 2 \cdot 4 \cdot 13 = 2^3 \cdot 13$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

OSS $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$: $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$, $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

Def Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Si dice che b DIVIDE a (o che b È UN DIVISORE DI a / a È UN MULTIPLO DI b) se $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = b \cdot q$

Si usano le seguenti notazioni:

$b \mid a$ significa che b divide a

$b \nmid a$ significa che b non divide a

$$(b \nmid a \Leftrightarrow \neg (b \mid a))$$

ESEMPI

$2 \mid 20 \qquad (20 = 2 \cdot 10)$

$2 \nmid 11$

$-5 \mid 20 \qquad 20 = (-5) \cdot (-4)$

$-3 \mid 6$

$5 \mid 0 \qquad (0 = 5 \cdot 0)$

Tutti i numeri dividono lo 0
Ma 0 divide solo se stesso
$(0 \mid a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = q \cdot 0 \Rightarrow a = 0)$

Def Sia $a \in \mathbb{Z}$ si dice che a è PARI se $2 \mid a$
si dice che a è DISPARI se $2 \nmid a$

$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots$
$-2 \quad -4 \quad -6 \quad -8 \quad \dots$] pari

$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \dots$
$-1 \quad -3 \quad -5 \quad -7 \quad -9 \quad \dots$] dispari

Def: Se $a \in \mathbb{R}$, si definisce VALORE ASSOLUTO di a la quantità:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$|-3| = 3 \qquad |-17| = 17 \qquad |4| = 4 \qquad |0| = 0$

OSS se $a, b \in \mathbb{Z}$, allora:
$b \mid a \Longleftrightarrow |b| \mid |a|$

(quindi la divisibilità in $\mathbb{Z}$ può essere studiata se può ridurre alla divisibilità per numeri naturali)

TEOREMA (DI DIVISIONE EUCLIDEA / DIVISIONE CON RESTO)

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Allora $\exists!\, q, r \in \mathbb{Z}$ tali che:

1) $a = b \cdot q + r$

2) $0 \leq r < |b|$

- q si dice QUOZIENTE DELLA DIVISIONE INTERA TRA a E b
- r si dice RESTO DELLA DIVISIONE INTERA FRA a E b

- $a = 20 \qquad b = 3$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 18 & 6 \; q \\ \hline 2 \; r & \end{array}$$

$q = 6$

$r = 2$

- $a = 100 \qquad b = 7$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \hline 7 & 14 \\ \hline 30 & \\ 28 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$q = 14$

$r = 2$

Attenzione ai segni:

- $a = 100 \qquad b = -7$

$100 = 7 \cdot 14 + 2$

$= (-7) \cdot (-14) + 2$

$q = -14$

$r = 2$

- $a = -100 \qquad b = 7$

$100 = 14 \cdot 7 + 2$

$$-100 = -14\cdot 7 - 2 \qquad q=-15$$
$$= (-14)\cdot 7 - 2 \qquad r = 5$$
$$= (-14)\cdot 7 - 7 + 7 - 2$$
$$= (-15)\cdot 7 + \underbrace{5}_{0\leq 5 < 7}$$

OSS

Se $0 \leq a < b$

$$a = b\cdot 0 + a \implies q=0, \quad r=a.$$

Ad esempio:

$$a = 3,\ b = 11 \implies q=0,\ r=a=3 \qquad (3 = 11\cdot 0 + 3)$$

OSS

1) $b \mid a \iff$ il resto della divisione di a per b è 0.
2) a è pari $\iff \exists\, q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2q$
3) a è dispari $\iff \exists\, q \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2q+1$
4) a è pari $\iff a^2$ è pari
5) a è dispari $\iff a^2$ è dispari

Domanda quanti divisori ha un numero intero?

- $n=0$ Tutti i numeri sono divisori di 0
- $n=1$ ± 1
- $n=2$ $\pm 1 \quad \pm 2$
- $n=3$ $\pm 1 \quad \pm 3$
- $n = 4 = 2^2$ $\pm \underset{2^0}{1} \quad \pm \underset{2^1}{2} \quad \pm \underset{2^2}{4}$

In generale: se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ si fattorizza in prodotto di numeri primi distinti come

$$n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$$ i divisori interi di n

sono:

$$\pm\, p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n} \quad \text{dove } b_1, \ldots b_n \in \mathbb{N} \text{ tali che}$$

$$0 \leq b_1 \leq a_1, \quad 0 \leq b_2 \leq a_2, \quad \ldots\ldots, \quad 0 \leq b_n \leq a_n$$

In particolare, ci sono esattamente

$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot \ldots \cdot(a_n+1)\cdot 2$ divisori interi di n

Equivalentemente, ci sono:

$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot \ldots \cdot(a_n+1)$ divisori naturali di n

ESEMPI:

1) $n = 50 = 2 \cdot 5^2 = 2^{\overset{a_1}{1}} \cdot 5^{\overset{a_2}{2}}$

ci sono esattamente $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ divisori interi di 50

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\ 2^0 \cdot 5^0 = \pm 1\\
&\pm\ 2^0 \cdot 5^1 = \pm 5\\
&\pm\ 2^0 \cdot 5^2 = \pm 25\\
&\pm\ 2^1 \cdot 2^0 = \pm 2\\
&\pm\ 2^1 \cdot 5^1 = \pm 10\\
&\pm\ 2^1 \cdot 5^2 = \pm 50
\end{aligned}\right\}$$

12 divisori interi
(6 divisori naturali)

2) $n = 520 = 13 \cdot 4 \cdot 10 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$
$= 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^1$

ci sono $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ divisori interi di 520

ci sono $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisori naturali di 520

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli. Si definisce MASSIMO COMUN DIVISORE TRA a e b (si indica con $M.C.D(a,b)$) il più grande numero intero che divide sia a che b.

Def: Siano $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si definisce MINIMO COMUNE MULTIPLO tra a e b il più piccolo numero intero positivo che è multiplo sia di a che di b. (Si indica con $m.c.m(a,b)$)

Come si calcolano?

$a = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$

$b = 48 = 2^4 \cdot 3$

$MCD(a,b) = 2^3 = 8$

$m.c.m(a,b) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 6000$

I numeri interi si usano spesso come indici nelle somme o nei prodotti di numeri reali.

Notazione:

Sia $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \leq n_2$. Sia

$f: \{n \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leq n \leq n_2\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- La somma

$$f(n_1) + f(n_1+1) + f(n_1+2) + \dots + f(n_2)$$

si indica con

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} f(k)$$ (SIMBOLO DI SOMMATORIA)

- Il prodotto

$$f(m_1) \cdot f(m_1+1) \cdot f(m_1+2) \cdot \ldots \cdot f(m_2)$$

si indica con

$$\prod_{k=m_1}^{m_2} f(k)$$ (SIBOLO DI PRODUTTORIA)

ESEMPI

$$\sum_{k=2}^{4} k = 2+3+4 = 9$$

$$\sum_{k=-1}^{3} k^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$

$$\prod_{k=1}^{4} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\cancel{\sum_{k=-1}^{2} \frac{1}{k}} = \frac{1}{-1} + \cancel{\frac{1}{0}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{m} k = 1+2+3+ \ldots + m$$

Curiosità

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}}$$

Numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0 \right\}$$

Nota La rappresentazione di un numero razionale come prodotto non è unica:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{100}{200} = \frac{-20}{-40}$$

Tuttavia è unica se richiediamo $b > 0$ e $MCD(a, b) = 1$, cioè:

$\forall q \in \mathbb{Q}, \; \exists! \; a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che

$$q = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad MCD(a, b) = 1.$$

OSS

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$: $\quad q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}, \quad q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}, \quad q_1 q_2 \in \mathbb{Q}$

e se $q_2 \neq 0$ $\quad \frac{q_1}{q_2} \in \mathbb{Q}$.

Con i numeri razionali si possono fare somme prodotti, differenze e divisioni ma non sempre si possono fare radici quadrate:

TEOREMA $\nexists \, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$

DIM

Per assurdo $\exists \, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $q = \frac{a}{b}$, $b > 0$, $MCD(a, b) = 1$.

$q^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow a^2$ è pari

$\Rightarrow a$ è pari

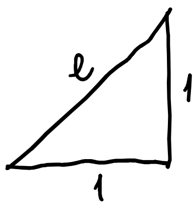
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2k$

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 2k^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2$ è pari $\Rightarrow b$ è pari

a e b sono pari $\Rightarrow$ MCD$(a, b) \geq 2$ che è assurdo $\square$



$l^2 = 2$

TEOREMA $\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 = 2$

(tale numero è necessariamente irrazionale appartiene a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Se $x^2 = 2$ e cerchiamo altri numeri tali che $y \in \mathbb{R}$ t.c. $y^2 = 2$, allora

$y^2 = 2$

$y^2 = x^2$

$y^2 - x^2 = 0$

$(y - x)(y + x) = 0$

$y - x = 0 \quad \vee \quad y + x = 0$

$y = x \quad \vee \quad y = -x$

Notazione: L'unico numero reale positivo il cui quadrato è 2 si indica con $\sqrt{2}$.

Più in generale dato $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, si può definire $\sqrt{y}$ come l'unico numero reale non negativo il cui quadrato è y. ($\sqrt{y}$ è positivo se $y > 0$).

OSS

- Se $n \in \mathbb{N}$, allora
  $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c. $n = m^2$.
- Se $q = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b > 0$, $\boxed{\mathrm{MCD}(a,b) = 1.}$
  allora:
  $\sqrt{q} \in \mathbb{Q} \iff \exists\, n, m \in \mathbb{N}$ t.c. $a = n^2$, $b = m^2$.

ESEMPI

- $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (3 non è un quadrato)
- $\sqrt{\frac{50}{8}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$
- $2 - \sqrt{3} = x$
  Se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 - x \in \mathbb{Q}$
  ma $2 - x = 2 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
  Quindi $x \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
  Sia $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
  Per assurdo, supponiamo $x \in \mathbb{Q}$. Allora:
  $x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = q$

Ma $x^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

quindi $5 + 2\sqrt{6} = 9$

$$\sqrt{6} = \frac{9-5}{2} \in \mathbb{Q}$$

Assurdo perché $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

- $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$? SI !

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = 2 \in \mathbb{Q}$$

Altri esempi di numeri irrazionali

π è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

e NUMERO DI NEPERO

La definizione di e richiede la teoria dei limiti o delle serie:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad \text{dove } k! = \prod_{j=1}^{k} j$$

sono esempi di numeri irrazionali ma la dimostrazione della loro irrazionalità è molto più complicata rispetto a quella che abbiamo visto per $\sqrt{2}$.

Ogni numero razionale ha una RAPPRESENTAZIONE DECIMALE (O ALLINEAMENTO DECIMALE) cioè si può scrivere come un "numero con la virgola"

ESEMPI

1) $\frac{9}{50}$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 50 \\ \hline 0 & 0,18 \\ \hline 90 & \\ 50 & \\ \hline 400 & \\ 400 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

quindi

$$\frac{9}{50} = 0,18$$

2) $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 0 & 0,33\ldots\ldots \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 10 & \\ 9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = 0,33333\ldots\ldots$

Vedremo che l'allineamento decimale di un numero razionale è sempre finito o periodico (semplice o misto).