PRECORSO

martedì 9 settembre 2025 08:58

Prof. Gabriele Mancini

Email: gabriele.mancini@uniba.it
Pagina web: https://www.dm.uniba.it/it/members/mancini

Ufficio: secondo piano, stanza 30

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30 (controllare avvisi sulla pagina web) oppure su appuntamento via email

Pagina web del Precorso di Matematica:
https://www.dm.uniba.it/it/didattica/precorsi/a-a-2025-26/precorso-di-matematica

Test finale: 19 settembre (iscrizione obbligatoria tramite la pagina del precorso **entro il 17 settembre**)

INSIEMI NUMERICI

- NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- NUMERI INTERI (RELATIVI)

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

- NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \;\underbrace{|}_{\text{tale che}}\; n \underbrace{\in}_{\text{appartiene}} \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \underbrace{\setminus}_{\text{differenza tra insiemi}} \{0\} \right\}$$

- NUMERI REALI

$$\mathbb{R} = \{ n, a_1 a_2 a_3 \dots \mid n \in \mathbb{Z},\ a_0, a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\} \}$$

- NUMERI IRRAZIONALI

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \}$$

- NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

Problema: queste non sono definizioni, sono solamente elenchi di simboli.

Per dare una definizione rigorosa degli insiemi numerici occorre determinarne le proprietà caratteristiche che sono vere indipendentemente dai simboli utilizzati per rappresentarli.

Ci sono due modi per farlo:

1) Partire da $\mathbb{N}$: definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ (approccio storico)
2) Partire da $\mathbb{R}$: definizione assiomatica di $\mathbb{R}$ (approccio moderno).

Per provare a definire i numeri naturali possiamo dire che:

I numeri naturali sono i numeri che usiamo per contare. Ma possiamo contare con diversi simboli:

0	1	2	3	4	5	...
—	|	||	|||	||||	|||||	...
	I	II	III	IV	V	...
0	1	10	11	100	101	...

Per contare abbiamo bisogno di:

- un insieme di simboli

- scegliere un simbolo iniziale.
- conoscere il successivo di ogni simbolo in modo tale che:
  1) contando i simboli non si ripetano
  2) tutti i simboli, tranne quello iniziale, sono il successivo di un altro simbolo
  3) contando a partire dal simbolo iniziale si ottengono tutti gli altri simboli.

Prima di formalizzare rigorosamente questo concetto, abbiamo bisogno di richiamare alcuni concetti astratti e ricordare il significato di alcuni simboli.

- <u>Simboli quantificatori</u>

$\forall$ ogni / per ogni)

$\exists$ esiste)

$\nexists$ non esiste

$\exists!$ esiste ed è unico

- <u>Implicazioni e simboli logici</u>

$\Rightarrow$ implica

$\nRightarrow$ non implica

$\Longleftrightarrow$ se e solo se

$\neg$ negazione.

• Insiemistica

Un insieme è una collezione di oggetti (detti elementi dell'insieme) per la quale è ben definita una legge di appartenenza.

$\in$ appartiene ($a \in A$, a appartiene all'insieme A)

$\notin$ non appartiene

$\subseteq$ inclusione ($A \subseteq B$ significa: $a \in A \Rightarrow a \in B$ oppure $\forall a \in A : a \in B$)

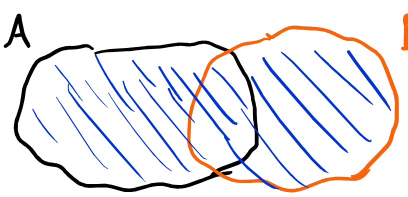
$\emptyset$ insieme vuoto.

Dati due insiemi A e B definiamo:

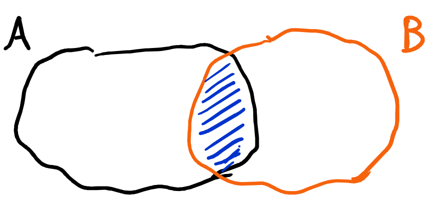
$A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$ UNIONE DI A E B

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \land x \in B \}$ INTERSEZIONE DI

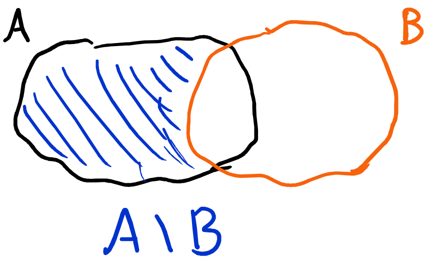
$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$ DIFFERENZA



$A \cup B$



$A \cap B$



Funzioni

Una FUNZIONE è una terna (A, B, f) dove A e B sono insiemi non vuoti e f è una legge che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno e un solo elemento di B (indicato con $f(a)$)

Le funzioni si indicano con $f: A \longrightarrow B$.

ESEMPI

$A = \{$ Ancona , Bari , Roma , Milano $\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto \text{prima vocale di } x \end{aligned}$$

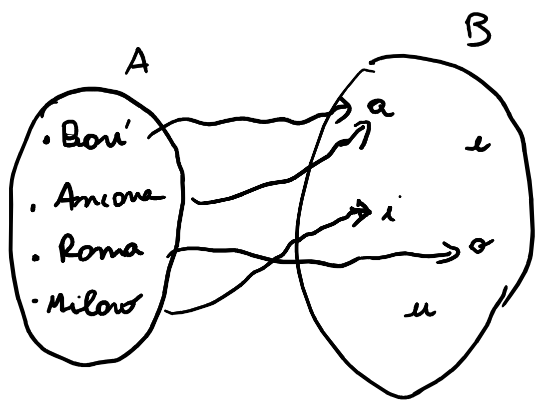
cioè

$f(\text{Ancona}) = a$

$f(\text{Bari}) = a$

$f(\text{Roma}) = o$

$f(\text{Milano}) = i$



Def Siano A e B due insiemi e sia $f: A \to B$ una funzione. Si definisce IMMAGINE di f l'insieme:

$$f(A) = \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ t.c. } f(x) = y \}$$
$$= \{ f(x) \mid x \in A \}$$

Nell'esempio precedente:

$$f(A) = \{a, i, o\}$$

Def Siano A, B due insiemi e sia $f: A \to B$ una funzione. Si dice che f è BIETTIVA / BIGETTIVA se $\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A$ t.c. $f(x) = y$.

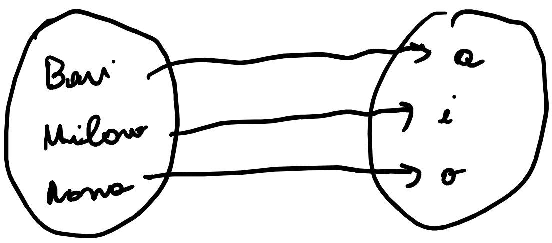
ESEMPIO

$A = \{$ Bari, Milano, Roma $\}$

$B = \{ a, i, o \}$

$$f: A \to B$$
$$x \longmapsto \text{prima vocale di } x$$

f è biettiva



Def: Si definisce OPERAZIONE BINARIA in un insieme $A \neq \emptyset$ una qualsiasi funzione $f: A \times A \to A$.

dove $$A \times A = \{ (x,y) \mid \underbrace{x, y \in A}_{x \in A \,\wedge\, y \in A} \}$$

Def Dati due insiemi A, B si definisce **PRODOTTO CARTESIANO DI A e B** l'insieme

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, \ y \in B \}$$
$$= \{ (a, b) \mid a \in A, \ b \in B \}$$

Le operazioni si indicano con simboli speciali
$(*, \cdot, +, \heartsuit, \square, \Delta, \dots)$

$*((x, y))$ si indica con $x * y$

$$* : \begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

Alfabeto greco:

Lettere dell'Alfabeto Greco		
minuscola	**maiuscola**	**nome**
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε, ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
ϑ, θ	Θ	theta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu (mi)
ν	N	nu (ni)
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rho
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ, ϕ	Φ	phi

υ	Υ	upsilon
φ, ϕ	Φ	phi
ψ	Ψ	psi
χ	X	chi
ω	Ω	omega

---

1) Definizione assiomatica di $\mathbb{N}$: ASSIOMI DI PEANO.

L'insieme dei numeri naturali è una terna $(\mathbb{N}, \bar{n}, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme
- $\bar{n} \in \mathbb{N}$.
- $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:

  1) $\forall\, n, m \in \mathbb{N}: \quad n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m)$
  2) $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{\bar{n}\}$
  3) Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \in A$ e $s(A) \subseteq A$, allora $A = \mathbb{N}$. (PRINCIPIO DI INDUZIONE)

Nel linguaggio comune

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\bar{n} = 0$

$s(0) = 1, \quad s(1) = 2 \quad s(2) = 3 \ldots\ldots$

Definizione assiomatica di $\mathbb{R}$.

I numeri naturali sono un insieme in cui:

- esistono due elementi speciali che indichiamo con 0 e 1 diversi tra loro.
- Sono definite due operazioni + e ·
- dati due numeri reali a, b è sempre possibile stabilire se $a \leq b$.
- Valgono le seguenti proprietà:

1) (proprietà di +):

1.1 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a+b)+c = a+(b+c)$ PROP. ASSOCIATIVA

1.2 $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a+b = b+a$ PROP. COMMUTATIVA

1.3 $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a+0 = a$

1.4 $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \ b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b=0$
(b è unico e si indica con $-a$)

2) Proprietà di ·

2.1 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2.2 $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$

2.3 $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = a$

2.4 $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists \ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c. $a \cdot b = 1$
(b è unico e si indica con $\frac{1}{a}$)

2.5 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
(PROP. DISTRIBUTIVA)

3) 3.1 $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \leq a$ (PROP. RIFLESSIVA)

3.2 $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

(PROP. ANTISIMMETRICA)

3.3 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(PROP. TRANSITIVA)

3.4 $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \vee b \leq a$

(PROP. TOTALE)

3.5 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

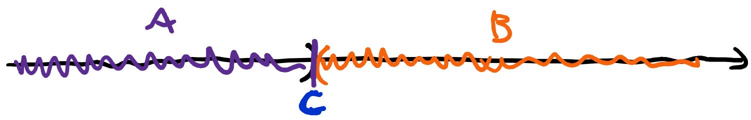
(COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON $+$)

3.6 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \wedge \underbrace{0 \leq c} \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

(COMPATIBILITÀ DI $\leq$ CON $\cdot$)

4) Proprietà / assioma di CONTINUITÀ:

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ tali che $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq b$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A, b \in B$: $a \leq c \wedge c \leq b$.



Conseguenze degli assiomi

LEGGI DI CANCELLAZIONE

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$: $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$

Equivalentemente

1) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c = b \iff a = b - c$

2) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0: \quad a \cdot c = b \iff a = \frac{b}{c}$

Nota: in $\mathbb{R}$ si possono fare sottrazioni e divisioni:

- $a - b$ è definito come $a + (-b)$
- Se $b \neq 0$ $\frac{a}{b}$ significa $a \cdot \frac{1}{b}$

PROPRIETÀ DELLE FRAZIONI

1) $\frac{1}{1} = 1$

2) $\forall\, a \in \mathbb{R}: \quad \frac{a}{1} = a$

3) $\forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \frac{a}{a} = 1$

4) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad \dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

5) $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b, d \neq 0:$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b\, d}$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

6) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R},\ b \neq 0:$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

ATTENZIONE

1) $\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (MAI SCRIVERE $=$)

2) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} \neq \dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ (è consigliabile evitare la scrittura $\frac{a}{\frac{b}{c}}$)

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

- PROPRIETÀ (PRODOTTO PER 0)

$\forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 0 = 0.$

- LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$

- PRINCIPI DI EQUIVALENZA PER LE DISUGUAGLIANZE:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + c \leq b \Leftrightarrow a \leq b - c$

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \boxed{c > 0}: \quad a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0: \quad ac \leq b \Leftrightarrow a \leq \frac{b}{c}$

5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, c < 0: \quad a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: c < 0: \quad ac \leq b \Leftrightarrow a \geq \frac{b}{c}$

OSS

$a \geq b$ significa $b \leq a$

$a < b$ significa $a \leq b \wedge a \neq b$

$a > b$ significa $a \geq b \wedge a \neq b$

$\neg (a \leq b) \iff a > b \iff b < a$

$\neg (a \geq b) \iff a < b \iff b > a$

$\neg (a > b) \iff a \leq b \iff b \geq a$

$\neg (a < b) \iff a \geq b \iff b \leq a$