

Precorso di Matematica

Esercizi - Foglio 2

Esercizio 1

Determinare l'unica risposta esatta alle seguenti domande a risposta multipla:

1. Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ ha 3 radici reali distinte
 - (B) $p(x)$ ha 2 radici reali distinte
 - (C) $p(x)$ ha un'unica radice reale
 - (D) $p(x)$ non ha radici reali
 - (E) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.
2. Si consideri il polinomio $p(x) = x^5 + 3x^2 + x + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ non ha radici razionali
 - (B) $p(x)$ è divisibile per $x + 2$
 - (C) $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$
 - (D) $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 - (E) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta
3. Quante radici reali ha il polinomio $x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$?
 - (A) tre
 - (B) due
 - (C) una
 - (D) nessuna
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
4. Si considerino i polinomi $a(x) = x^5 + x^4 + 1$ e $b(x) = x^2 + x + 1$. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) Il polinomio prodotto $a(x)b(x)$ non ha radici reali
 - (B) Il polinomio $a(x) + b(x)$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$
 - (C) $a(x) \mid b(x)$
 - (D) $b(x) \mid a(x)$
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
5. Si consideri il polinomio $p(x) = 10x^5 - 7x^3 + x$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ può essere scritto come prodotto di 3 polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$
 - (B) $p(x)$ ha esattamente tre radici reali
 - (C) $p(x)$ ha un'unica radice reale
 - (D) $p(x)$ non ha radici irrazionali
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

6. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri il polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + a^2$. Quanti sono i valori di a per cui $p(x)$ ha un'unica radice razionale?
- (A) nessuno
 (B) uno
 (C) due
 (D) infiniti
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
7. L'equazione $3x^4 + x^2 - 2 = 0$ ha:
- (A) una soluzione
 (B) due soluzioni
 (C) tre soluzioni
 (D) quattro soluzioni
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
8. L'equazione $\frac{x}{x+1} + \frac{4}{3x} = \frac{2x}{1-x^2}$:
- (A) ha tre soluzioni reali
 (B) ha due soluzioni reali
 (C) ha una soluzione reale
 (D) non ha soluzioni reali
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.
9. Si consideri l'equazione $\frac{11x^2}{x-1} + \frac{2+11x-19x^3}{2x^2-x-1} = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (A) L'equazione ha una soluzione razionale e due soluzioni irrazionali
 (B) L'equazione ha una soluzione irrazionale e due soluzioni razionali
 (C) L'equazione ha tre soluzioni razionali
 (D) L'equazione ha tre soluzioni irrazionali
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
10. L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $\frac{1}{3x^2-1} \geq 2$ è:
- (A) $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[\cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$
 (B) $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$
 (C) $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$
 (D) $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
11. La disequazione $x \geq \frac{30}{x-1}$ è risolta da ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che:
- (A) $x \leq -5 \vee x \geq 6$
 (B) $-5 \leq x \leq 6$
 (C) $x \leq -5 \vee 1 < x \leq 6$

- (D) $-5 \leq x < 1 \vee x \geq 6$
 (E) Nessuna delle risposte precedenti

12. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2 - 2}{3 - x} \leq x$ è:

- (A) $[-\frac{1}{2}, 2] \cup]3, +\infty[$
 (B) $[-\frac{1}{2}, 2]$
 (C) $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 3[$
 (D) $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$
 (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

13. La disequazione $\frac{3x - 7 - 4x^2}{3x - 1} \geq 0$ è risolta da ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che:

- (A) $x < \frac{1}{3}$
 (B) $x > \frac{1}{3}$
 (C) $x \leq -\frac{7}{4} \vee \frac{1}{3} < x \leq 1$
 (D) $-\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1$
 (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

14. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x(3x^2 + x - 1)^2}{(x + 1)^4} \leq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $S \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
 (B) S è unione di due intervalli disgiunti
 (C) S è un intervallo
 (D) $S \cap \mathbb{Q}$ non contiene numeri positivi
 (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

15. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x + 2}{x} > x + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $S = \emptyset$
 (B) S è un intervallo non vuoto
 (C) S è unione di due intervalli aperti disgiunti
 (D) S è unione di tre intervalli aperti disgiunti
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

16. L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^5 + 5x^3 \leq 6x$ è:

- (A) $[-1, 1]$
 (B) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
 (C) $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$
 (D) $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$
 (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

17. Si consideri il polinomio $p(x) := 2x^3 + x^2 + x - 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $p(x)$ non ha radici razionali.

- (B) $p(x)$ è divisibile per $x - 3$.
 (C) $p(x)$ è divisibile per $2x - 1$.
 (D) Il resto della divisione di $p(x)$ per $x + 2$ è 21.
 (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

18. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{3-x^2}{x} \leq 3x+1$ è :

- (A) $[-1, 0] \cup [\frac{3}{4}, +\infty[$
 (B) $]-\infty, -1] \cup]0, \frac{3}{4}]$
 (C) $[-1, \frac{3}{4}] \setminus \{0\}$
 (D) $]-\infty, -1] \cup [\frac{3}{4}, +\infty[$
 (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Esercizio 2

Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili e determinarne le radici reali:

- (a) $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$
 (b) $x^4 - 8x^2 + 15$
 (c) $2x^4 + x^2 - 1$
 (d) $-x^5 + 2x^3 + 8x$
 (e) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$
 (f) $6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 9x + 2$

Esercizio 3

Dimostrare che il polinomio $\sqrt{3}x^3 + x + \sqrt{2}$ non ha radici razionali.

Esercizio 4

Determinare il valore di a per cui il polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 - 2x + 2a$ sia divisibile per $x - 3$.

Esercizio 5

Risolvere le seguenti equazioni:

- (a) $\frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} = 2$
 (b) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$
 (c) $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{3}{x - 2} - 2$
 (d) $\frac{x - 1}{x} + \frac{4}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$

Esercizio 6

Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

(a) $\frac{x^2 + 2x}{3} + \frac{5x}{12} > \frac{3x + 1}{4}$

(b) $x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0$

(c) $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

(d) $\frac{3x^2 + 2x - 6}{3 - 2x - x^2} \geq -2$

(e) $\frac{1}{x} \leq \frac{x}{x^2 + x - 2}$

(f) $\frac{1 + x + x^2 - 3x^3}{14 + 5x - x^2} \geq 0$

Esercizio 7

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

(1) $\begin{cases} 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 \geq 1 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

Esercizio 8

Determinare il numero di radici (distinte) del seguente polinomio al variare di $m \in \mathbb{Z}$:

$$x^3 + m^2x^2 - m^2x - m^4.$$

Soluzioni

Risposte Esercizio 1

1. B 2. A 3. C 4. D 5. E 6. C 7. B 8. B 9. A
10. B 11. D 12. A 13. A 14. D 15. C 16. C 17. C 18. A

Risultati Esercizio 2

(a) $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6 = 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2x - 1)$.
Radici: $\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(b) $x^4 - 8x^2 + 15 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
Radici: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(c) $2x^4 + x^2 - 1 = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)$.

Radici: $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $-x^5 + 2x^3 + 8x = -x(x-2)(x+2)(x^2 + 2)$.

Radici: 0, 2, -2.

(e) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + 1)^2$.

Radici: -1.

(f) $6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 9x + 2 = (2x+1)(3x+2)(x^2 + x + 1)$.

Radici: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$.

Soluzione Esercizio 3

Sia $p(x) = \sqrt{3}x^3 + x + \sqrt{2}$. Supponiamo per assurdo che esista $q \in \mathbb{Q}$ tale che $p(q) = 0$. Si noti che $q \neq 0$ perché $p(0) \neq 0$. La condizione $p(q) = 0$ implica $\sqrt{3}q^3 = -q - \sqrt{2}$. Elevando al quadrato, otteniamo $3q^6 = q^2 + 2\sqrt{2}q + 2$, da cui si deduce che

$$\sqrt{2} = \frac{3q^6 - q^2 - 2}{2q} \in \mathbb{Q},$$

il che è assurdo.

Risultato Esercizio 4

$a = 3$.

Risultati Esercizio 5

(a) $x = -1 \vee x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

(b) $x = 1 \vee x = -1$

(c) $x = -\frac{4}{3} \vee x = 3$

(d) $x = -2$

(e) $x = 1 \vee x = -3 - 2\sqrt{2}$

Risultati Esercizio 6

(a) $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

(b) $\{1, -1\}$

(c) $]-2, 1[\cup[2, +\infty[$

(d) $]-3, 0] \cup]1, 2]$

(e) $]-2, 0[\cup]1, 2]$

(f) $]-2, 1] \cup]7, +\infty[$

Risultati Esercizio 7

(1) Nessuna soluzione

(2) $x \in [-2, -1] \cup \{3\}$

(3) $x \in [1, \frac{3}{2}[$

Risultato Esercizio 8

Se $m \notin \{0, \pm 1\}$ si hanno 3 radici; se $m = \pm 1$ si hanno 2 radici; se $m = 0$ si ha 1 radice.