

⑧ ESPOENZIALI E LOGARITMI

Potenze di esponente reale Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Vogliamo dare un significato alla potenza a^x con $x \in \mathbb{R}$.

Se $x \in \mathbb{N}$, $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{volte}}$.

Se $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ $\begin{matrix} p, q \in \mathbb{Z} \\ q \geq 1 \end{matrix}$, $a^x = \sqrt[q]{a^p}$

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a^x ? $2^{\sqrt{2}}$?

Definiamo i sottoinsiemi $S, T \subset \mathbb{R}$

$$S = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\} \quad T = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}.$$

Se $a = 1$, $S = T = \{1\}$.

Se $a > 1$, $s \leq t \quad \forall s \in S \quad \forall t \in T \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : s \leq y \leq t$

Se $a < 1$, $t \leq s \quad \forall s \in S \quad \forall t \in T \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : t \leq y \leq s$.

Si può dimostrare che y è unico, quindi possiamo definire $a^x = y$

Un esempio per illustrare questa idea: 2^π

$$3 < \pi < 4 \Rightarrow 2^3 = 8 < 2^\pi < 2^4 = 16$$

$$3'1 < \pi < 3'2 \Rightarrow 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}} < 2^\pi < 2^{\frac{16}{5}} = \sqrt[5]{2^{16}} \Rightarrow 8'5 < 2^\pi < 9'1$$

$$3'14 < \pi < 3'15 \Rightarrow 2^{\frac{314}{100}} = \sqrt[100]{2^{314}} < 2^\pi < 2^{\frac{315}{100}} = \sqrt[100]{2^{315}} \Rightarrow 8'81 < 2^\pi < 8'87$$

⋮

$$2^\pi = 8'82448\dots$$

Proprietà delle potenze di esponenti reali

Sia $a \in \mathbb{R}$, le seguenti proprietà sono vere:

$$(1) a^0 = 1, 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(3) a^x a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(4) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(5) (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(6) a^x b^x = (ab)^x \quad \forall a, b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logaritmi

Siano $a, b > 0, a \neq 1$. Chiamiamo logaritmo in base a di b al unico numero reale $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = b$, e lo indichiamo come $y = \log_a b$.

$$y = \log_a b \Leftrightarrow a^y = b.$$

Esempi

$$\log_3 27 = 3 \quad \text{perché} \quad 3^3 = 27$$

$$\log_{10} 0.01 = -2 \quad \text{perché} \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

Proprietà dei logaritmi

Siano $a, b, x, y \in \mathbb{R}, a, b, x, y > 0, a, b \neq 1$.

Le seguenti proprietà sono vere:

$$(1) \log_a 1 = 0 \quad \text{perché} \quad a^0 = 1 \quad \forall a > 0.$$

$$(2) \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$xy = a^{\log_a (xy)}$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy \quad \left. \vphantom{a^{\log_a x + \log_a y}} \right\}$$

Quindi, $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$.

Prendiamo $\log_a$ in questa identità e si ottiene

$$\log_a (a^{\log_a(xy)}) = \log_a (a^{\log_a x + \log_a y})$$

$$\Rightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

(3) $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

(5) Cambio di base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Per definizione: $a^{\log_a x} = x \Rightarrow \log_b (a^{\log_a x}) = \log_b x$

$$\Rightarrow (\log_a x) (\log_b a) = \log_b x$$

Il numero e: 2.71828...

Dimostrato da Eulero.

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Trovata da Bernoulli nel contesto degli interessi composti

* e è irrazionale

* e è la base per eccellenza dei logaritmi ed esponenziali:

$$\log_e x \equiv \log x, \quad \exp(x) \equiv e^x$$

Le seguenti notazioni NON saranno utilizzate:

$$\ln x \neq \log_e x, \quad \text{Log } x \neq \log_{10} x$$

* Le potenze reali possono essere definite in base alla esponenziale $\exp$ e il logaritmo $\log$ attraverso la formula

$$a^b = e^{b \log a}$$

Equazioni con esponenziali e logaritmi

① Trovare i valori di x che soddisfano $e^{2x} - e^x = 2$

Facciamo la sostituzione $e^x = t$: $t^2 - t - 2 = 0$.

Risolviamo l'equazione in t : $t = -1 \vee t = 2$.

Questo ci porta al calcolo di diversi logaritmi:

$$\begin{cases} e^x = -1 \rightarrow e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ quindi } \nexists \text{ soluzioni} \\ e^x = 2 \rightarrow \boxed{x = \log 2} \end{cases}$$

② Risolvere

$$\log_2 x + 2 \log_4 x = 2$$

Notiamo le condizioni di esistenza: $x > 0$.

Facciamo la sostituzione $t = \log_2 x$. Per mettere in relazione $\log_2 x$ e $\log_4 x$ utilizziamo la formula per il cambio di base:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_4 2} = \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{t}{2}$$

Quindi l'equazione diventa $2t = 2 \Rightarrow t = 1$.

Per annullare il cambio di variabile, risolviamo

$$\log_2 x = 1$$

Per definizione di logaritmo, $2^{\log_2 x} = x$, quindi
esponenziando l'equazione:

$$2^{\log_2 x} = 2^1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

Esercizi del capitolo 8:

① Calcolare il valore numerico dei seguenti logaritmi.

(a) $\log_{\sqrt{2}} 8$

(b) $\log_{1/3} \sqrt[3]{9}$

(c) $\log_{10} 0.001$

(d) $\log_3 3^8 \sqrt{\frac{1}{3^5}}$

(e) $\log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\log_{a^\alpha} a^\beta$ $\begin{matrix} a > 0 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}$

② Determinare il valore di $a > 0$ in ogni caso

(a) $\log_a 2 = 4$

(b) $\log_a \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \frac{-1}{3}$

(c) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} a = -2$

③ Risolvere le seguenti equazioni

(a) $e^{2x}(e^{2x} + 3) = 4$ ($x = 0$)

(b) $\log_3 x - \log_{\sqrt{3}}(x^2) = 1$ ($x = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$)

(c) $e^x - 2e^{-x} = 1$ ($x = \log 2$)