4.7. (2) $\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x} > 0$

Moltiplichiamo la disequazione per $x$, distinguendo i casi in base al segno che ha:

Se $\underline{x>0}$; $\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x} > 0 \iff \sqrt{x-1}-1 > 0 \iff 1 < \sqrt{x-1}$

$\iff \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 < \sqrt{x-1} \end{cases}$ $\leftarrow$ Condizione per l'esistenza della radice.

$\iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 1 < x-1 \iff 2 < x \end{cases} \iff x > 2.$

Se invece $\underline{x<0}$: $\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x} > 0 \iff \sqrt{x-1}-1<0$

$\iff \sqrt{x-1} < 1 \iff \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1<1 \end{cases} \iff \begin{matrix} x \geqslant 1 \\ x < 2. \end{matrix}$

$\iff x \in [1,2[$ Non dimenticare (come me) di controllare anche questa condizione.

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} \longrightarrow x \in \emptyset.$$

Quindi, l'insieme delle soluzioni è $\{x>2\} = ]2,+\infty[$.

4.8. Dimostrare che la disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x|+|y|$ è un'uguaglianza se e solo se $x, y$ hanno lo stesso segno o uno dei due è zero.

$$\underbrace{|x+y|}_{\geq 0} = \underbrace{|x|+|y|}_{\geq 0} \iff (x+y)^2 = (|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y|$$

$$\iff x^2+y^2+2xy = x^2+y^2+2|xy| \iff xy = |xy|$$

$$\iff xy \geq 0. \leftarrow$$ Questa condizione è soddisfatta quando $x, y$ hanno lo stesso segno, $x=0$ oppure $y=0$.

Reciprocamente,

* Se $x=0$, $|x+y| = |y| = |x|+|y|$ ✓
* Se $y=0$, $|x+y| = |x| = |x|+|y|$ ✓
* Se $x, y$ hanno lo stesso segno,
  * * Se $x, y < 0$, $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x+y| = -x-y$
  * * Se $x, y > 0$, $|x| = x$, $|y| = y$, $|x+y| = x+y$.

4.9. Dimostrare che $500^{999} > 999! = 999 \cdot 998 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Raggruppiamo i fattori di $999!$ in coppie:

$$999! = \underbrace{(999\cdot 1)(998 \cdot 2)(997 \cdot 3) \ldots (501 \cdot 499)}_{499 \text{ coppie}} \cdot 500 =$$

$$= \underbrace{(500+499)(500-499)}_{\text{Somma per differenza}} \underbrace{(500+498)(500-498)} \ldots \underbrace{(500+1)(500-1)}\, 500$$

$$= \underbrace{(500^2-499^2)(500^2-498^2)\ldots(500^2-1)}_{\text{Fattori \underline{tutti positivi}}}\, 500 < (500^2)^{499}\, 500 = 500^{999}.$$

$500^2 - k^2 < 500^2$

$k = 1, \ldots, 499$.