UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Introduzione all'Analisi Matematica

Appunti del corso

Sergio Cruz Blázquez
Dipartimento di Matematica

Settembre 2022

Indice

Indice **3**

1 Numeri Reali **5**
1.1 Proprietà dei numeri reali . . . 6
1.2 Potenze con esponente intero . . . 7
1.3 Valore assoluto . . . 8
1.4 Potenze con esponente fratto . . . 8
1.5 Razionalizzazione . . . 11
1.6 Esercizi del capitolo 1 . . . 13
1.7 Soluzione agli esercizi . . . 15

2 Polinomi **17**
2.1 Definizione . . . 17
2.2 Divisione Euclidea dei polinomi . . . 19
2.3 Radici dei polinomi . . . 20
2.4 Scomposizione di polinomi a coefficenti interi . . . 21
2.5 Frazioni algebriche . . . 24
2.6 Esercizi del capitolo 2 . . . 26
2.7 Soluzioni agli esercizi . . . 27

3 Equazioni **29**
3.1 Equazioni polinomiali . . . 29
3.2 Equazioni razionali . . . 33
3.3 Equazioni con radicali . . . 33
3.4 Equazioni con valore assoluto . . . 35
3.5 Esercizi del capitolo 3 . . . 36
3.6 Soluzioni agli esercizi . . . 38

4 Disequazioni **39**
4.1 L'ordine dei numeri reali . . . 39
4.2 Disequazioni lineari . . . 40

4.3 Disequazioni di ordine superiore 41
4.4 Sistemi di disequazioni con un'incognita 45
4.5 Disequazioni fratte 45
4.6 Disequazioni con valore assoluto 47
4.7 Esercizi del capitolo 4 49
4.8 Soluzioni agli esercizi 50

Capitolo 1

Numeri Reali

Comprendere l'insieme dei numeri reali, la sua struttura e le sue principali proprietà, è il primo passo fondamentale nello studio dell'Analisi Matematica. Presenteremo questo insieme attraverso i suoi sottoinsiemi notevoli, ma senza dare una definizione concreta di numero reale, perché l'importante non è sapere che cos'è un numero reale, ma quali proprietà ha l'insieme dei numeri reali.

Nell'ambito dei numeri reali, segnaliamo i seguenti tipi di numeri

- Naturali ($\mathbb{N}$) : $0, 1, 2, 3, \ldots$
- Interi ($\mathbb{Z}$) : $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$
- Razionali ($\mathbb{Q}$) : l'insieme dei numeri razionali è costituito da tutti quei numeri che possono essere scritti come una frazione $\frac{p}{q}$, con p, q interi e $q \neq 0$.

  Calcolando l'espressione decimale di un numero razionale dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene un numero intero o un numero decimale esatto o periodico: $0.2, -0.35, 0.\widehat{3} = 0.333..., 4.99\widehat{89} = 4.99898989...$

  È vero anche il reciproco: qualsiasi numero decimale di questo tipo può essere scritto come una frazione di numeri interi.

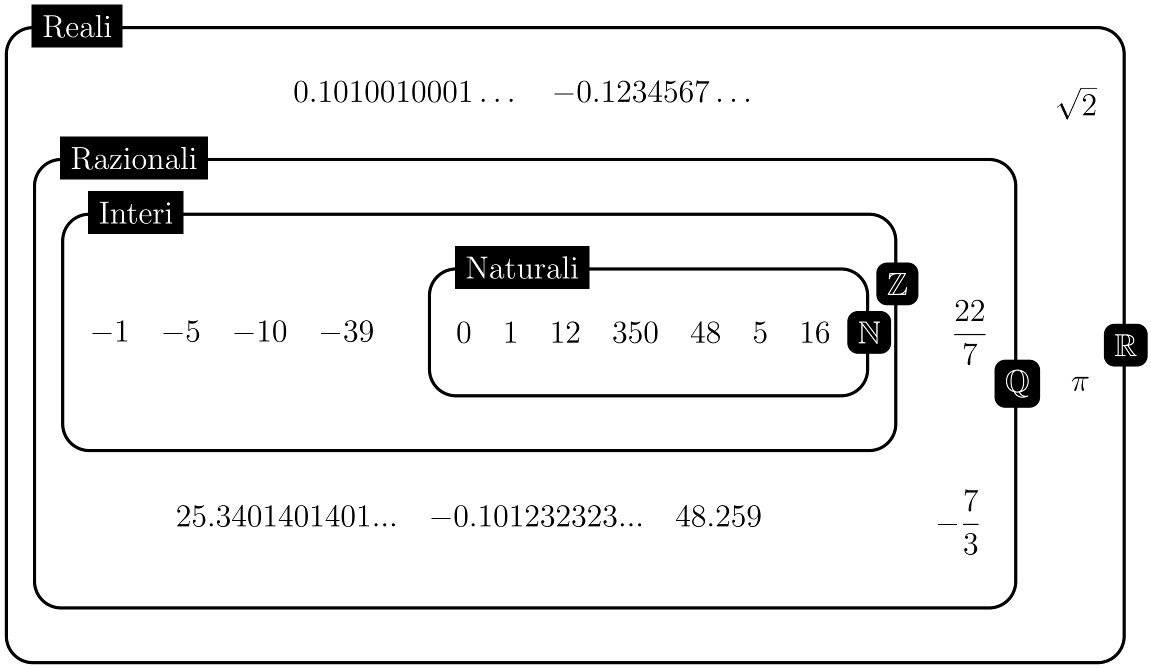
  $$2.3\widehat{1} = \frac{231-23}{90} = \frac{104}{45}$$

- Irrazionali ($\mathbb{I}$) : I numeri irrazionali sono quelli che non possono essere scritti come frazioni di numeri interi. La loro espressione decimale è infinita e non periodica: $0.246810...$, $\pi = 3.1415926...$, $e = 2.7182818...$, $\sqrt{2} = 1.41421...$

  In generale, se $n \in \mathbb{N}$ non è un quadrato perfetto, $\sqrt{n}$ è irrazionale.

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{I}$, allora $a + b$ e ab sono irrazionali. Perciò, numeri come $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1 - \sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $2\sqrt{2} \ldots$ sono irrazionali.

- Reali ($\mathbb{R}$) : l'insieme dei numeri reali è costituito dai numeri razionali e dai numeri irrazionali.



1.1 Proprietà dei numeri reali

Nell'insieme $\mathbb{R}$ abbiamo un'operazione chiamata *somma*, che per ogni coppia (a, b) di numeri reali associa un unico numero reale, la somma di a con b, indicata con $a + b$. Inoltre abbiamo anche una seconda operazione chiamata *prodotto*, che associa ad ogni coppia (a, b) un singolo numero reale, il prodotto di a con b, indicato con $a \cdot b$, o semplicemente ab. Queste operazioni hanno le seguenti proprietà:

- Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Commutativa: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
- Esistenza di elemento neutro: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
- Esistenza di elemento simmetrico: $a + (-a) = 0$, $b \cdot \dfrac{1}{b} = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. L'elemento simmetrico per la somma si chiama *opposto*, mentre quello per il prodotto è denominato *inverso*.
- Distributiva: $a(b + c) = ab + ac$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

È facile notare che gli elementi neutri per la somma e il prodotto sono unici. Inoltre, l'elemento simmetrico è unico per ogni numero reale. Dato che $a \cdot 0 = 0$ per ogni a reale, **lo 0 non ha un inverso,** e $\frac{1}{0}$ **non ha senso**.

Oltre alle operazioni di somma e prodotto, in $\mathbb{R}$ abbiamo una terza struttura, una relazione d'ordine, che ci permette di confrontare i numeri reali e di lavorare con le disuguaglianze. Dati due numeri reali a e b, diciamo che

- *a è minore di b* e lo indichiamo come $a < b$, quando $b - a$ è positivo.
- *a è maggiore di b* e si scrive $a > b$ quando $b - a$ è negativo.

Se ammettiamo la possibilità $a = b$, diciamo che *a è minore o uguale a b* o che *a è maggiore o uguale a b*, e lo indichiamo con $\leqslant$ e $\geqslant$ rispettivamente. Più avanti verranno discusse le proprietà di questa relazione d'ordine.

1.2 Potenze con esponente intero

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. La potenza di *base* a ed esponente n è definita come:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Ricorda!

- Se la base di una potenza è positiva, la potenza è positiva.

$$5^3 = 125, \quad 10^4 = 10000$$

- Se la base è un numero negativo, la potenza è positiva se l'esponente è pari e negativa se è dispari.

$$(-2)^2 = 4, \quad (-5)^3 = -5^3 = -125$$

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, definiamo la potenza di esponente $-n$ come segue:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Proposizione 1.1 (Proprietà delle potenze). *Siano $n, m \in \mathbb{N}$.*

- $a^0 = 1 \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.
- *Prodotto di potenze con la stessa base:* $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.
- *Quoziente di potenze con la stessa base:* $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}, \ \ a \neq 0$.
- *Potenza di un prodotto:* $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
- *Potenza di un quoziente:* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \ \ b \neq 0$

In particolare $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a, b \neq 0.$

- *Potenza di una potenza:* $(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$

Occhio! In generale, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

1.3 Valore assoluto

Il valore assoluto di un numero reale a è, per definizione, il numero reale $|a|$ dato da:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geqslant 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Dalla definizione derivano immediatamente le seguenti proprietà, valide per tutti $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| \geqslant 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $a \leqslant |a|$
- $|a| \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leqslant a \leqslant b.$
- $|-a| = |a|$
- $a^2 = |a|^2\,.$
- $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad |a| = |b|.$

Occhio! $5^2 = (-5)^2 = 25$, ma $5 \neq -5$

Con i punti precedenti possiamo dimostrare che il valore assoluto rispetta il prodotto, ma in generale per la somma abbiamo solo delle disuguaglianze:

- $|ab| = |a|\,|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
- $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

1.4 Potenze con esponente fratto

Dati un numero reale a e un numero naturale $n \geqslant 1$, si chiama *radice ennesima* di a, o *radice di indice n*, ogni numero reale b che verifica $b^n = a$.

Il numero di radici ennesime di un numero reale dipende dal fatto che l'indice n sia pari o dispari, e dal segno del radicando a.

$$b \begin{cases} a > 0 & \begin{cases} n \text{ dispari} & \Rightarrow & \text{una radice positiva} \\ n \text{ pari} & \Rightarrow & \text{due radici: una positiva e la sua opposta} \end{cases} \\ \\ a = 0 & \Rightarrow \quad b = 0 \\ \\ a < 0 & \begin{cases} n \text{ dispari} & \Rightarrow & \text{una radice negativa} \\ n \text{ pari} & \Rightarrow & \text{nessuna radice} \end{cases} \end{cases}$$

$$4^2 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow 16 \text{ ha due radici quadrate}$$
$$(-4)^3 = -64 \Rightarrow -64 \text{ ha una radice terza}$$

Per questo motivo, dobbiamo distinguere due casi per dare una definizione corretta del simbolo $b = \sqrt[n]{a}$:

- Se $a > 0$,
$$b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a, \quad \text{e} \quad b > 0.$$
- Se $a < 0$ e n dispari,
$$b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a.$$

Fate attenzione! Se $a > 0$ e n pari, a ha due radici n-esime: $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.

Ad esempio, 4 ha due radici quadrate: -2 e 2, ma $\sqrt{4}$ denota sempre la radice positiva $\sqrt{4} = 2$.

Scrivere $\sqrt{4} = \pm 2$ **non è corretto!**

È utile sapere che esiste un ulteriore modo per indicare una qualsiasi radice $n-$esima, utilizzando la seguente relazione tra radicali e potenze:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geqslant 1.$$

Tramite questa formula possiamo definire potenze con esponente razionale: siano a un numero reale **positivo**, e n, m interi con $n \geqslant 1$. La potenza di esponente fatto $a^{\frac{m}{n}}$ è il radicale di indice n e radicando a^m, e viene indicata come

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Se $a < 0$, conviene scrivere la radice con un radicando positivo prima di trasformarla in forma di potenza per evitare errori ed essere sicuri che sia ben definita.

$$\sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}, \quad \sqrt[3]{(-2)^5} = -\sqrt[3]{2^5} = -2^{\frac{5}{3}}$$

Notiamo che questa definizione è coerente e non dipende dalla scelta del rappresentante della frazione. Infatti, per ogni $s \in \mathbb{N}$ e $a > 0$:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[s \cdot n]{a^{s \cdot m}}.$$

Occhio! Se $a < 0$, $a^{\frac{m}{n}}$ potrebbe essere diverso da $a^{\frac{p}{q}}$ anche se $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono equivalenti.

$$(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)} = -\sqrt[3]{2} < 0, \quad (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2} > 0.$$

Pertanto, prima di esprimere una radice come potenza frazionaria, **dobbiamo sempre avere un radicando positivo.**

Questo ci spinge a scegliere una forma canonica con cui rappresentare i radicali. Per noi consisterà nel calcolare il valore numerico delle radici del maggior numero possibile di fattori.

Come si fa? Esempi: $\sqrt[8]{1024}$, $\sqrt[3]{(-3)^5}$

1. Per prima cosa ci occupiamo del segno del radicando, lasciando una quantità positiva all'interno della radice.

$$\sqrt[3]{(-3)^5} = -\sqrt[3]{3^5}$$

2. Esprimiamo la radice come potenza con esponente frazionario.

$$\sqrt[8]{1024} = \sqrt[8]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{8}}, \quad -\sqrt[3]{3^5} = -3^{\frac{5}{3}}$$

3. Trasformiamo le frazioni improprie in numeri misti e separiamo in prodotti di potenze. Per concludere, li riconvertiamo in radici.

$$2^{\frac{10}{8}} = 2^{1+\frac{1}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}, \quad -3^{\frac{5}{3}} = -3^{1+\frac{2}{3}} = -3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = -3\sqrt[3]{9}$$

Operazioni con radicali. È facile notare che le proprietà delle potenze con esponente intero si trasferiscono naturalmente alle potenze con esponente fratto. Sottolineamo le seguenti operazioni, valide per $a, b > 0$:

- Per *ridurre radici ad indice comune*, le rappresentiamo come frazioni di uguale denominatore. Esempio: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{27}$.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}} \to \text{mcm}\,(2,3,4) = 12$$
$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6}, \quad 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}, \quad 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{3^9}$$

- Per *moltiplicare o dividere i radicali*, devono avere lo stesso indice o lo stesso radicando: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{2^6}\,\sqrt[12]{2^4}\,\sqrt[12]{3^9} = \sqrt[12]{2^{10}3^9}$$
$$\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt[12]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

- Si possono *sommare o sottrarre* solo radicali con lo stesso indice e radicando: $c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$.

$$2\sqrt{2} + \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- *Potenza e radice* di un radicale: $\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}$, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^8 = \left(\sqrt[6]{3}\right)^8 = \sqrt[6]{3^8} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^8 = 3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8} = 3^{\frac{8}{6}} = 3^{1+\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{3}$$

- *Un caso particolare di interesse*: se a è un numero reale **qualsiasi**,

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ dispari,} \\ |a| & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

1.5 Razionalizzazione

La razionalizzazione è una tecnica che ci permette di semplificare le frazioni che hanno radicali al denominatore riscrivendole come frazioni equivalenti in cui i radicali sono stati trasferiti al numeratore.

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Razionalizzare radicali semplici. Per razionalizzare una frazione del tipo $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$, con $a > 0$, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$:

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{m-n}}}{\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{m-n}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{m-n}}}{a}$$

Questa tecnica si basa sulla definizione stessa di radicale; la frazione viene moltiplicata e divisa per il radicale che permette al radicando nel denominatore di raggiungere l'indice di radice.

$$\frac{10}{\sqrt{2}\sqrt[3]{25}} = \frac{10}{\sqrt{2}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\sqrt{2}\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{5^2}\sqrt{2}\sqrt[3]{5}} = \sqrt{2}\sqrt[3]{5}$$

Razionalizzare frazioni con un binomio al denominatore. In questo caso, cerchiamo di razionalizzare frazioni del tipo

$$\frac{z}{ax + b\sqrt{y}}, \quad \frac{z}{a\sqrt{x} + b\sqrt{y}}.$$

L'idea consiste nello sfruttare il prodotto notevole della somma per differenza per cancellare le radici:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Quindi, moltiplichiamo e dividiamo la frazione per il coniugato del denominatore, e applichiamo la formula precedente:

$$\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{c\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

Se volessimo razionalizzare frazioni con binomi al denominatore con radicali di indice superiore, dovremmo utilizzare la seguente generalizzazione dell'identità notevole di prima:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall n \geqslant 1.$$

In particolare, se $n = 3$:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

e cambiando b con $-b$,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$\frac{2\sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{2}\,(1 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})}{(1 + \sqrt[3]{4})(1 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2})} = \frac{2\,(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2^5})}{1 + 4} = \frac{2\,(\sqrt[3]{2} - 2 + 2\sqrt[3]{4})}{5}.$$

1.6 Esercizi del capitolo 1

Esercizio 1.1. Siano $a, b > 0$. Semplifica il più possibile le seguenti espressioni

(1) $\dfrac{3^3+9^2}{6^2}$ (2) $\dfrac{6^3}{6^3-3^4}$ (3) $\dfrac{(2a+b)^2-b(b-4a)}{2ab+4b^2}$

(4) $\dfrac{a^2(2^3b^{-2})}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)^{-2}}-2\left(\dfrac{b}{(a^2 2^{-1})^2}\right)^{-2}$

Esercizio 1.2. Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\,\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ (2) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{4+4\sqrt{5}}$ (3) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Esercizio 1.3. Siano $a, b > 0$. Semplifica le seguenti espressioni:

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{-8a^3b^{-2}}}{\sqrt[6]{64(-a)^2}}$ (3) $\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[3]{a^5}\,\sqrt[6]{a^{-2}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\,\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$ (5) $\sqrt{4a^4+5a^2-\sqrt{a^4}}$ (6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\,a^{-2}\,\sqrt[3]{b}}{b^{\frac{-2}{3}}\,\sqrt[4]{a}\,a^{\frac{1}{2}}}$

Esercizio 1.4. Siano $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. Raggruppare le seguenti espressioni sotto un unico radicale:

(1) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[n]{a}}}$ (2) $\sqrt[4]{a}\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ (3) $a\sqrt{a}(\sqrt[3]{a})^{-2}$

(4) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{2\sqrt{a}}}\right)^{-3}$ (5) $\dfrac{\sqrt[3]{-3a}}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(-a)^2}}$ (6) $\dfrac{\sqrt[n]{2}\sqrt{a^n}}{\sqrt{n}}$

Esercizio 1.5. Scrivi le seguenti quantità come un'unica frazione senza radicali nel denominatore:

(1) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{2}\,(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$ (2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (3) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{2}}$

Esercizio 1.6. Dimostrare che $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3} \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.7. Dimostrare che

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}} \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 1.8. Trova l'errore in questa dimostrazione:

Tutti i numeri reali sono uguali tra loro.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ qualsiasi, e sia $m \in \mathbb{R}$ la loro media aritmetica: $m = \dfrac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned}
a+b &= 2m \\
(a-b)(a+b) &= 2m(a-b) \\
a^2-b^2 &= 2ma-2mb \\
a^2-2ma &= b^2-2mb \\
a^2-2ma+m^2 &= b^2-2mb+m^2 \\
(a-m)^2 &= (b-m)^2 \\
a-m &= b-m \\
a &= b
\end{aligned}$$

1.7 Soluzione agli esercizi

Esercizio 1.1: (1) 3, (2) $\frac{8}{5}$, (3) $\frac{2a}{b}$, (4) 0

Esercizio 1.2: (1) 5, (2) -4, (3) 1

Esercizio 1.3: (1) $\frac{1}{a}$, (2) $-\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, (3) $a^2\sqrt[12]{a}$, (4) $\sqrt[3]{a^2 b}$, (5) $2a\sqrt{1+a^2}$, (6) $\frac{b}{a^2}$.

Esercizio 1.4: (1) $\sqrt[6n]{a^{3n+1}}$, (2) $\sqrt{a}$, (3) $\sqrt[6]{a^5}$, (4) $\sqrt[3]{8a^2}$, (5) $-\sqrt[3]{\frac{3}{4a}}$, (6) $\sqrt[2n]{\frac{4a^{n^2}}{n^n}}$

Esercizio 1.5: (1) $\frac{\sqrt[3]{4}\,(13+4\sqrt{10})}{2}$, (2) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt[3]{4}-1}{4}$, (3) $2+2\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$,

(4) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{10}$, (5) $-\frac{\sqrt[3]{9}+4\sqrt[3]{6}+4\sqrt[3]{4}}{13}$

Capitolo 2

Polinomi

I polinomi sono tra le espressioni più elementari e fondamentali dell'Algebra. Calcolare le loro radici e scomporle in fattori irriducibili è utile in molti rami della matematica. In particolare, in Analisi Matematica, queste tecniche trovano applicazione nella risoluzione di equazioni, disequazioni ed equazioni differenziali, nonché nel calcolo de certe integrali.

I polinomi si costruiscono come somme algebriche di altre espressioni più semplici, i monomi, che ricordiamo di seguito.

2.1 Definizione

Un **monomio** è un'espressione algebrica costituita dal prodotto di una parte numerica e di una parte letterale. La parte numerica del monomio è un numero reale qualsiasi, mentre la parte letterale è constituita di potenze con base letterale ed esponente naturale.

$$\underbrace{a}_{\text{Parte numerica}} \cdot \underbrace{{x_1}^{n_1} \cdot {x_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot {x_k}^{n_k}}_{\text{Parte letterale}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

La parte numerica è anche chiamata coefficiente, mentre le lettere che compongono la parte letterale sono note come indeterminate.

Il **grado** di un monomio è definito come la somma degli esponenti della sua parte letterale. Se un monomio non ha una parte letterale, diciamo che il suo grado è 0.

Nel contesto dei monomi, il numero 0 corrisponde al monomio nullo. Inoltre, qualsiasi monomio con parte numerica 0 si riduce al monomio nullo. Per convenzione, il grado del monomio nullo è $-\infty$.

$$\begin{aligned} -x^2y^2z &\;\rightarrow\; \text{grado } 5, \\ 6 &\;\rightarrow\; \text{grado } 0, \\ 0x^2y^3 = 0 &\;\rightarrow\; \text{monomio nullo.} \end{aligned}$$

Operazioni con monomi.

- Possiamo sommare monomi con parte letterale identica, sommando le loro parti numeriche.

$$2x^2y^2 - 5x^2y^2 = (2-5)x^2y^2 = -3x^2y^2$$

- Utilizzando le proprietà delle potenze possiamo definire il prodotto, la divisione e le potenze di monomi. È da notare che i risultati delle potenze negative e di alcune divisioni non sono monomi.

$$3x^2y \cdot (-2)xz = -6x^3yz, \quad (-\sqrt{2}x^3)^2 = 2x^6$$

$$\frac{4x^4y^2}{2xy} = 2x^3y, \quad \frac{6xy}{x^2} = 6x^{-1}y$$

Un **polinomio** è qualunque somma algebrica formale finita di monomi.

$$P\underbrace{(x,y)}_{\text{Indeterminate}} = \underbrace{2x^2y^2 + x^2 - xy + 1}_{\text{Termini}}, \quad Q(x,y) = x^2y^2 - 1$$

Utilizzando le proprietà della somma e il prodotto, possiamo ridurre la somma e il prodotto di polinomi alla somme e prodotti di monomi.

- Per sommare i polinomi sommiamo tutti i loro termini e raggruppiamo i monomi con la stessa parte letterale.

$$P(x,y) + Q(x,y) = 2x^2y^2 + x^2 - xy + 1 + x^2y^2 - 1 = 3x^2y^2 + x^2 - xy$$

- Per moltiplicare due polinomi si applica la proprietà distributiva, moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni monomio del secondo e sommando.

$$\begin{aligned} P(x,y) \cdot Q(x,y) &= 2x^4y^4 - 2x^2y^2 + x^4y^2 - x^2 - x^3y^3 + x^2y^2 - 1 \\ &= 2x^4y^4 - x^3y^3 + x^4y^2 - x^2y^2 - x^2 - 1 \end{aligned}$$

  Analogamente,

$$P(x,y)^n = \underbrace{P(x,y) \cdot P(x,y) \cdot \ldots \cdot P(x,y)}_{n \text{ volte}}$$

  È importante notare che il grado di un prodotto di polinomi è la somma dei gradi dei suoi fattori.

Occhio! Come nel caso delle parantesi, i fattori che appaiono davanti a un polinomio moltiplicano tutti i suoi termini, non solo il primo. In particolare, il segno meno cambia i segni di tutti termini.

$$P(x,y) - 2Q(x,y) = 2x^2y^2 + x^2 - xy + 1 - 2x^2y^2 + 2 = x^2 - xy + 3$$

Sbagliare il segno quando si opera con i polinomi è un errore molto comune!

- La divisione di un polinomio per un monomio si effettua anche termine a termine, sempre utilizzando le proprietà delle potenze.

$$\frac{6x^2y^2 - 2x^2y + 2xy^2 + 4xy}{2xy} = \frac{6x^2y^2}{2xy} - \frac{2x^2y}{2xy} + \frac{2xy^2}{2xy} + \frac{4xy}{2xy} = 3xy - x + y + 2$$

Non lo fare mai!

$$\frac{6x^2}{3x+2} \neq \frac{6x^2}{3x} + \frac{6x^2}{2}$$

2.2 Divisione Euclidea dei polinomi

La divisione di polinomi merita una menzione speciale, poiché è uno strumento molto utile per la decomposizione di polinomi. Per illustrarla ci limiteremo al caso di polinomi con una sola indeterminata.

L'algoritmo della divisione Euclidea ci dice che, dati due polinomi $P(x), Q(x)$, con $1 \leqslant \deg(Q(x)) \leqslant \deg(P(x))$, esistono due polinomi $C(x)$ e $R(x)$ tali che

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Divisore}} \cdot \underbrace{C(x)}_{\text{Quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto}},$$

con $\deg(R(x)) < m$.

Esempio.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -2x^2 & +x & +1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2 + x - 2 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & -3x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^2 & & +1 & \\
 & & 2x^2 & -2x & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & -2x & +3 &
\end{array}$$

Poi,

$$x^4 - 2x^2 + x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 2) - 2x + 3$$

2.3 Radici dei polinomi

In quanto segue, ci limiteremo ai polinomi con una sola indeterminazione, che scriveremo nel modo seguente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

con $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, e $a_n \neq 0$. a_n è noto come *coefficiente direttivo* e a_0 è chiamato *termine noto.* Anticipiamo che siamo particolarmente interessati ai polinomi con coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Dato un numero reale c, chiamiamo valutazione di $P(x)$ in c alla quantità risultante dalla sostituzione dell'indeterminata x con c, cioè,

$$P[c] = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

A questo punto, definiamo le **radici** di un polinomio $P(x)$ come tutti quei numeri reali c che soddisfano $P[c] = 0$.

$$P(x) = x^2 - 4x + 4, \quad P(2) = 4 - 8 + 4 = 0 \quad \to 2 \text{ è una radice di } P(x).$$

$$Q(x) = x^2 + 1 > 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \to Q(x) \text{ non ha radici reali.}$$

Utilizzando l'algoritmo di divisione euclidea con $q(x) = x - c$, ci si rende conto che

$$P(x) = (x - c)q(x) + r \quad \Rightarrow \quad P[c] = r,$$

perché in questo caso il resto r è un polinomio di grado 0, cioè una costante. Questo risultato è noto come **Teorema del resto** e implica che un polinomio ammette c come radice se e solo se è divisibile per $x - c$.

$$c \text{ è una radice di } P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x - c)P_1(x),$$

essendo $P_1(x)$ un polinomio con $\deg(P_1) = \deg(P) - 1$.

Se P_1 ammette nuovamente c come radice, diciamo che c è una radice doppia di $P(x)$. In generale, diciamo che c ha **molteplicità** m se

$$P(x) = (x - c)^m Q(x), \quad Q[c] \neq 0.$$

Alcune proprietà e casi particolari.

- Un polinomio di grado n ammette al massimo n radici reali, ciascuna contata con la propria molteplicità.

- Ogni polinomio di grado dispari ammette almeno una radice reale.

- Le radici reali scompaiono in coppie. Così, un polinomio di grado 4 può avere $4, 2$ o nessuna radice reale, mentre un polinomio di grado 5 ha $5, 3$ o 1, contate con la loro molteplicità.

- Lo zero è una radice di $P(x)$ se e solo se $a_0 = 0$.

$$x^4 - x^2 + x = x(x^3 - x + 1)$$

- **Radici di polinomi di grado 2.** Sia $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio con $a \neq 0$. Definiamo il suo discriminante Δ come la quantità

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

  - Se $\Delta > 0$, $P(x)$ ha due radici reali: $r_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - Se $\Delta = 0$, $P(x)$ ha una radice doppia: $r_+ = r_- = \dfrac{-b}{2a}$.
  - Se $\Delta < 0$, $P(x)$ non ha nessuna radice reale.

- **Teorema delle radici razionali.** Sia $\frac{p}{q}$ una frazione irriducibile di numeri interi, e sia $P(x)$ un polinomio **a coefficenti interi con** $a_0 \neq 0$. Se $\frac{p}{q}$ è una radice di $P(x)$, allora p divide a a_0 e q divide a a_n. Inoltre, $P(x)$ può essere scritto come

$$P(x) = (qx - p)P_1(x),$$

dove $P_1(x)$ è un altro polinomio a coefficenti interi.

$$P(x) = 6x^2 + x - 2 \to \begin{cases} \text{div}(-2) = \{\pm 1, \pm 2\} \\ \text{div}(6) = \{\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 6\} \end{cases}$$

$$\text{Possibili radici razionali:} \quad \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}\right\}$$

2.4 Scomposizione di polinomi a coefficenti interi

Le formule della sezione precedente dimostrano l'enorme utilità di esprimere un polinomio come prodotto di polinomi più semplici, e giustificano le seguenti definizioni:

Si dice che un polinomio $P(x)$ è **irriducibile** se ogni fattorizzazione della forma $P(x) = Q(x)C(x)$ implica che $Q(x)$ o $C(x)$ siano costanti.

In particolare, i binomi della forma $ax + b$ e i polinomi di grado 2 senza radici reali sono irriducibili.

Occhio! Non avere radici reali non significa essere irriducibile.

$x^4 + 2x^2 + 1 > 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \rightarrow$ non ammette radici reali, ma si vede che

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$$

Decomporre un polinomio $P(x)$ in fattori irriducibili significa esprimerlo nella forma

$$P(x) = P_1(x)^{n_1} \cdot P_2(x)^{n_2} \cdot \ldots \cdot P_k(x)^{n_k},$$

dove ogni $P_i(x)$ è un polinomio irriducibile, e $k, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ sono tale che $n_1 + \ldots + n_k = \deg(P(x))$. Questa fattorizzazione è unica salvo per prodotto per polinomi di grado 0.

Esempio.

Decomporre $2x^7 - x^6 - 2x^3 + x^2$ come prodotto di polinomi irriducibili.

La decomposizione di un polinomio a coefficienti interi è un processo iterativo in cui a ogni passo si trova la radice più semplice possibile e si estrae il fattore associato di grado 1 utilizzando l'algoritmo di divisione. Questo ci permette di ridurre il lavoro al quoziente, che sarà di grado inferiore e quindi più facile da studiare.

1 Se il polinomio non ha termine noto, lo 0 è una radice e possiamo raccogliere una potenza di x come fattore comune:

$$2x^7 - x^6 - 2x^3 + x^2 = x^2\,(\underbrace{2x^5 - x^4 - 2x + 1}_{\text{Studiamo il quoziente}})$$

2 Procediamo ad applicare il Teorema delle radici razionali per trovare le possibili radici razionali del polinomio risultante: $P_1(x) = 2x^5 - x^4 - 2x + 1$

$$\text{div}(1) = \{\pm 1\}, \ \ \text{div}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} \rightarrow \text{Possibili radici: } \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$$

Conosciamo diversi metodi per verificare se i nostri candidati sono effettivamente radici del polinomio: valutare $P[c]$ e dividere per $x - c$ per ogni candidato a radice c. Tuttavia, esiste una tecnica che combina entrambe le procedure in un algoritmo molto semplice, il **metodo di Ruffini**.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\
\hline
 & 2 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8}
\end{array}$$

Questa tabella si legge come segue:

$$2x^5 - x^4 - 2x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) + \frac{15}{8}.$$

In particolare, per il Teorema del resto $P_1(x) = \dfrac{15}{8}$, quindi $\dfrac{-1}{2}$ non è una radice di P_1. Invece,

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\underbrace{(2x^4 - 2)}_{P_2(x)}$$

E si ripete il procedimento per $P_2(x)$ e per quelli successivi:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Siamo arrivati a

$$P(x) = x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)\underbrace{(2x^2 + 2)}_{P_4(x)},$$

e possiamo verificare che $P_4(x)$ non ammette radici razionali.

3 Quando si arriva ad un polinomio che non ammette radici razionali, si può provare ad applicare le **identità notevole**:

- Somma per differenza: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2)$$

- Formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Se il polinomio risultante è di secondo grado della forma $ax^2 + bx + c$, sappiamo come calcolare le sue radici (se ne ha):

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $r_{\pm}$ sono reali, allora si ha la seguente scomposizione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_-)(x - r_+).$$

Nel nostro esempio, $P_4(x) = 2x^2 + 2$ ha $\Delta = -16 < 0$, quindi è irriducibile. Finalmente:

$$\begin{aligned} 2x^7 - x^6 - 2x^3 + x^2 &= x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)\left(2x^2+2\right) \\ &= x^2 (2x-1)(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

è una decomposizione in fattori irriducibili.

2.5 Frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una divisione indicata di due polinomi $P(x), Q(x)$, dove $Q(x)$ è sempre un polinomio di grado maggiore di 0.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \deg(Q(x)) \geqslant 1.$$

Per **semplificare** le frazioni algebriche, si fattorizzano numeratore e denominatore e si cancellano i fattori comuni.

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x} = \frac{x(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Le operazioni con le frazioni algebriche hanno le stesse proprietà delle operazioni con le frazioni numeriche:

- Per sommare e sottrarre frazioni algebriche le riduciamo a un comune denominatore.
- Per calcolare il loro prodotto si moltiplicano i numeratori e i denominatori.
- Per dividere per una frazione algebrica si moltiplica per la sua inversa.

Esempio

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x^2-1}$$

Innanzitutto fattorizziamo i denominatori:

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= (x+1)^2 \\ x^2-1 &= (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Per convertire le frazioni a denominatore comune, si calcola il minimo comune multiplo, che si ottiene come prodotto dei fattori non comuni e dei fattori comuni con l'esponente maggiore. In questo caso,

$$\text{m.c.m}\,(x^2+2x+1, x^2-1) = (x+1)^2(x-1).$$

Operiamo e semplifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x^2-1} &= \frac{2x+3}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(2x+3)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x-1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{x+2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2.6 Esercizi del capitolo 2

Esercizio 2.1. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili:

$$(1)\ \ -x^5+2x^3+8x \qquad (2)\ \ 4x^3-2x^2-12x+6$$
$$(3)\ \ x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1 \qquad (4)\ \ 6x^4+13x^3+15x^2+9x+2$$

Esercizio 2.2. Fattorizzare il seguente polinomio sapendo che x^2+x+1 è uno dei suoi divisori:

$$x^6-x^5-2x^4-7x^3-11x^2-10x-6$$

Esercizio 2.3. Determinare il valore di a affinché il seguente polinomio sia divisibile per $x-3$:

$$x^3-ax^2-2x+2a$$

Esercizio 2.4. Utilizzare la sostituzione $x^2=y$ per calcolare le radici dei seguenti polinomi e decomporli come prodotto di fattori irriducibili:

$$(1)\ \ x^4-8x^2+15 \qquad (2)\ \ 2x^4+x^2-1 \qquad (3)\ \ x^4+5x^2+4$$

Esercizio 2.5. Opera e semplifica le seguenti espressioni:

$$(1)\ \ \frac{x+4}{x^2-2x-3}-\frac{1-2x}{x^3-7x-6} \qquad (2)\ \ 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1-x}{x^2-x}$$
$$(3)\ \ \frac{2}{3(2-x)}+\frac{x}{2x+4}+\frac{7x+2}{6(x^2-4)}$$

Esercizio 2.6. Determinare il numero di radici diverse del seguente polinomio in funzione di $m \in \mathbb{Z}$:

$$x^3+m^2x^2-m^2x-m^4$$

Esercizio 2.7. Dimostrare che se $2a$ è un quadrato perfetto, x^4+a^2 può essere scritto come prodotto di polinomi di grado 2 a coefficienti interi. Utilizzare questo fatto per fattorizzare x^4+4.

2.7 Soluzioni agli esercizi

Esercizio 2.1: (1) $-x(x-2)(x+2)(x^2+2)$, (2) $2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(2x-1)$, (3) $(x+1)(x^2+1)^2$, (4) $(2x+1)(3x+2)(x^2+x+1)$

Esercizio 2.2: $(x-3)(x+1)(x^2+2)(x^2+x+1)$

Esercizio 2.3: $a=3$

Esercizio 2.4: (1) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \rightarrow$ radici: $\{\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}\}$, (2) $(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)(x^2+1) \rightarrow$ radici: $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, (3) $(x^2+4)(x^2+1)$

Esercizio 2.5: (1) $\dfrac{x+7}{(x+2)(x-3)}$, (2) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, (3) $\dfrac{1+x}{2(x+2)}$

Esercizio 2.6: $m \notin \{0, \pm 1\} \rightarrow 3$ radici diverse, $m = \pm 1 \rightarrow 2$ radici diverse, $m = 0 \rightarrow 1$ radice.

Capitolo 3

Equazioni

3.1 Equazioni polinomiali

Un'**equazione polinomiale** è una qualsiasi equazione che può essere scritta nella forma

$$P(x) = 0,$$

essendo $P(x)$ un polinomio. Il grado di tale polinomio è noto come **grado dell'equazione**, ed è equivalente alla massima potenza dell'incognita x che compare nell'equazione.

Ricordiamo che le soluzioni dell'equazione sono i valori $c \in \mathbb{R}$ che rendono vera l'uguaglianza quando si sostituisce l'incognita, cioè $P(c) = 0$, quindi risolvere un'equazione polinomiale consiste nel determinare le radici di $P(x)$. Questo implica che più alto è il grado, maggiore è la complessità.

Equazioni di primo grado. Sono equazioni della forma

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

È chiaro che questa equazione ha una unica soluzione unica data da $x = \dfrac{-b}{a}$.

Esempio

$$\frac{4x-1}{2} - 2(x-1) = x + 1$$

Per ridurre l'equazione a una forma più semplice, eliminiamo prima i denominatori moltiplicando entrambi i lati per il loro minimo comune multiplo.

$$4x - 1 - 4(x-1) = 2(x+1)$$

Sottraiamo $2(x-1)$ da entrambi i lati per rendere uno dei membri uguale a zero e operiamo:

$$4x - 1 - 4(x-1) - 2(x+1) = 0 \quad \Rightarrow 1 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Equazioni di secondo grado. Le equazioni di secondo grado sono quelle che possono essere scritte come

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

L'esistenza di soluzioni dipende dal discriminante del polinomio $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Se $\Delta < 0$, l'equazione non ha nessuna soluzione reale.
- Se $\Delta > 0$, ci sono due soluzioni reali $r_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Se $\Delta = 0$, l'equazione ammette una sola soluzione $r_+ = r_-$

Dimostrazione. Innanzitutto, notiamo che un'equazione di secondo grado scritta come segue è facile da risolvere utilizzando la identità notevole della somma per differenza:

$$(Ax + B)^2 - C^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (Ax + B + C)(Ax+B - C) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_- = -\frac{C + B}{A}, \quad x_+ = \frac{C - B}{A}$$

Cercheremo di scrivere la nostra equazione originale in questa forma. Per farlo, sviluppiamo quest'ultima identità:

$$(Ax + B)^2 - C^2 = A^2x^2 + 2ABx + B^2 - C^2$$

Supponiamo che $a > 0$ (se non lo è, moltiplichiamo l'equazione per -1 per avere un coefficiente direttivo positivo). Risulta chiaro che prendendo

$$A = \sqrt{a}, \quad B = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad C = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}},$$

sempre che $b^2 - 4ac \geqslant 0$, abbiamo

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

quindi le soluzioni sono

$$x_- = -\frac{C+B}{A} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_+ = \frac{B-C}{A} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Equazioni di grado superiore. Si sa anche che Tartaglia e Cardano trovarono una formula analoga per le equazioni cubiche, in cui compaiono le radici cubiche oltre alle radici quadrate, e che Ferrari ne trovò una più complessa per le equazioni quartiche, anche se in realtà sono così complesse ed ingestibili che è preferibile descrivere il processo di risoluzione come un algoritmo. Infine, Abel ha dimostrato che, per $n \geqslant 5$, non esistono formule analoghe che esprimano le radici dell'equazione generale di grado n in funzione dei suoi coefficienti attraverso somme, prodotti, quozienti ed radicali, facendo delle formule di Cardano-Ferrari due eccezioni algebriche e avvertendo della difficoltà del problema.

In questi casi, possiamo solo aspirare a trovare alcune delle loro soluzioni o studiare casi molto particolari.

Un'equazione polinomiale $P(x) = 0$ si dice **scomponibile** se $P(x)$ si fattorizza in polinomi di cui sappiamo calcolare le radici. Questo ci permette di risolvere l'equazione applicando la regola di annullamento di un prodotto:

$$\text{Se } \; P(x) = P_1(x)^{n_1} \cdots P_k(x)^{n_k} \Rightarrow \left[P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_1(x) = 0, & \text{oppure} \\ P_2(x) = 0, & \text{oppure} \\ \cdots \\ P_k(x) = 0 \end{cases} \right]$$

Esempio.

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

Utilizzando le tecniche del capitolo 2, si può esprimere il polinomio a sinistra come prodotto di fattori irriducibili di primo e secondo grado:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = (x-2)(x+2)(x^2+x+2)$$

Uguagliando ogni fattore a zero possiamo trovare tutte le soluzioni all'equazione:

$$\begin{array}{ll} x-2=0 & \to x = 2 \\ x+2=0 & \to x=-2 \\ x^2+x+2=0 & \to \text{ non ha soluzioni} \end{array}$$

Tutte le soluzioni della equazione sono ± 2.

Esempio. In altri casi sarà impossibile fattorizzare completamente in polinomi di grado 1 e 2 e non potremo calcolare tutte le soluzioni con le tecniche a nostra disposizione.

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

Possiamo vedere che

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1 = (x-1)(x^3 + 2x + 1),$$

quindi $x = -1$ è una soluzione dell'equazione, ma $x^3 + 2x + 1$ non ammette ulteriori radici razionali. Tuttavia, possiamo intuire che esiste almeno un' altra soluzione diversa da -1, perché ogni polinomio di grado dispari ha almeno una soluzione reale.

Equazioni binomie e trinomie.

Un'**equazione binomia**, come suggerisce il nome, è un'equazione polinomiale in cui $P(x)$ è un binomio, ossia

$$ax^n + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Questo tipo di equazione può essere riscritta come $x^n = \dfrac{-b}{a}$, quindi le sue soluzioni, per definizione, sono le radici ennesime di $\dfrac{-b}{a}$.

$$x^n = \frac{-b}{a} \begin{cases} \dfrac{-b}{a} > 0 & \begin{cases} n \text{ dispari} & \Rightarrow \text{ una soluzione } x = \sqrt[n]{\dfrac{-b}{a}} \\ n \text{ pari} & \Rightarrow \text{ due soluzioni } x_1 = \sqrt[n]{\dfrac{-b}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt[n]{\dfrac{-b}{a}} \end{cases} \\ b = 0 \Rightarrow \text{ una soluzione } x = 0 \\ \dfrac{-b}{a} < 0 & \begin{cases} n \text{ dispari} & \Rightarrow \text{ una soluzione } x = -\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}} \\ n \text{ pari} & \Rightarrow \text{ nessuna soluzione} \end{cases} \end{cases}$$

Analogamente, un'**equazione trinomia** è un'equazione della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Per risolverla utilizzeremo il cambio di variabile $x^n = t$, e risolveremo l'equazione di grado due in t

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Poi, per ottenere le soluzioni dell'equazione originale dovremo risolvere le equazioni binomie $x^n = t$ per ogni soluzione t, seguendo i passaggi spiegati sopra.

Esempio.

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Sostituendo $x^2 = t$, riduciamo l'equazione a una di grado 2:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \to \quad t \in \{1, 4\}.$$

Per tornare all'incognita x, risolviamo due equazioni binome:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad \to \quad x \in \{-2, 2\}, \\ x^2 &= -1 \quad \to \quad \text{non ha nessuna soluzione reale.} \end{aligned}$$

Pertanto, tutte le soluzioni reali dell'equazione sono ± 2.

3.2 Equazioni razionali

Un'**equazione razionale** è un'uguaglianza tra frazioni algebriche. Per risolverli eliminiamo i denominatori moltiplicando l'equazione per il loro minimo comune multiplo, e le riduciamo a equazioni polinomiali.

Esempio.

$$\frac{3x}{x-3} - 2\,\frac{x+1}{x-1} = 4\,\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

Si moltiplica per il minimo comune multiplo dei denominatori, $(x-1)(x-3)$, e semplifichiamo:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{1, 2\}$$

Occhio! Le due equazioni sono equivalenti quando $(x-1)(x-3) \neq 0$. Dobbiamo verificare che le soluzioni ottenute non annullino i denominatori!

Quindi $x = 1$ non è soluzione!

3.3 Equazioni con radicali

Le **equazioni con radicali** sono quelle in cui la variabile appare sotto il segno della radice. Per risolverle, si isolano le radici, una per una, e si eleva l'equazione a una potenza appropriata.

Quando eleviamo un'equazione a una potenza, aumentiamo il suo grado e possono comparire soluzioni della nuova equazione che non soddisfano quella originale o per le quali questa non è definita. Dunque, **è necessario verificare tutte le soluzioni ottenute**.

Esempio 1.

$$3\sqrt{x-2}+x=6$$

Isoliamo la radice nel membro a sinistra e eleviamo al quadrato l'equazione:

$$3\sqrt{x-2}=6-x \quad \overset{\square^2}{\Rightarrow} \quad 9(x-2)=36+x^2-12x$$

$$\Rightarrow x^2-21x+54=0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{3,18\}$$

Controlliamo le soluzioni e ci rendiamo conto che 18 non risolve l'equazione originale:

$$3\sqrt{3-2}+x=6, \quad 3\sqrt{18-2}+18=30\neq 6$$

Esempio 2.

$$\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}=1$$

Isoliamo le radici una alla volta e eleviamo al quadrato:

$$-\sqrt{x+1}=1-\sqrt{3x} \quad \overset{\square^2}{\Rightarrow} \quad x+1=1+3x-2\sqrt{3x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3x}=x$$
$$\overset{\square^2}{\Rightarrow} \quad x^2-3x=0 \quad \Rightarrow x \in \{0,3\},$$

e si può facilmente verificare che solo $x=3$ è una soluzione dell'equazione originale.

Esempio 3.

$$\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{x-2}$$

Eliminiamo una radice alla volta, elevando prima l'equazione a 2 e poi a 3:

$$\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{x-2} \quad \overset{\square^2}{\Rightarrow} \quad \sqrt[3]{(x+2)^2}=x-2 \quad \overset{\square^3}{\Rightarrow} \quad (x+2)^2=(x-2)^3$$

Espandiamo usando il binomio di Newton e semplifichiamo

$$x^3-7x^2+8x-12=0.$$

Utilizzando il metodo di Ruffini, si vede che

$$x^3-7x^2+8x-12=(x-6)(x^2-x+2),$$

e quindi $x=6$ è l'unica soluzione dell'equazione.

3.4 Equazioni con valore assoluto

L'ultimo tipo di equazioni che studieremo è quello delle **equazioni con valore assoluto**, in cui l'incognita compare all'interno dell'operatore $|\cdot|$.

Possiamo lavorare con queste equazioni nello stesso modo in cui abbiamo fatto con le equazioni con i radicali, isolando i valori assoluti su un lato dell'equazione e elevando al quadrato, sfruttando la proprietà $|x|^2 = x^2$.

Alternativamente, per ogni valore assoluto che compare possiamo distinguere i suoi possibili valori e lavorare con equazioni separate di grado inferiore.

In entrambi i casi si possono ottenere delle false soluzioni, quindi bisogna sempre controllarle alla fine!

Esempio 1.

$$2\,|3 + x| + x = 0$$

Iniziamo isolando il valore assoluto e elevando al quadrato l'equazione:

$$2\,|x + 3| = -x \overset{\square^2}{\Rightarrow} 4(x^2 + 6x + 9) = x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2 + 8x + 12 = 0 \Rightarrow x \in \{-6, -2\}$$

In questo caso, entrambi i risultati sono soluzioni vere dell'equazione.

Ora proviamo a distinguere i casi:

$$\begin{aligned} &\text{Se } 3 + x \geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad |3 + x| = 3 + x \Rightarrow 2(3 + x) + x = 0 \Rightarrow x = -2 \\ &\text{Se } 3 + x < 0 \quad\Rightarrow\quad |3 + x| = -3 - x \Rightarrow -2(3 + x) + x = 0 \Rightarrow x = -6. \end{aligned}$$

Esempio 2.

$$|2 - |x|| + x = 0$$

Utilizziamo il primo metodo

$$|2 - |x|| = -x \overset{\square^2}{\Rightarrow} 4 + x^2 - 4\,|x| = x^2 \quad\Rightarrow\quad |x| = 1 \quad\Rightarrow\quad x \in \{\pm 1\}$$

Verifichiamo le soluzioni:

$$\begin{aligned} |2 - |-1|| - 1 = 0 &\quad \to -1 \text{ è soluzione} \\ |2 - |1|| + 1 = 2 \neq 0 &\quad \to 1 \text{ non è soluzione} \end{aligned}$$

3.5 Esercizi del capitolo 3

Esercizio 3.1.

$$(1)\ x^4 - x = \frac{1 - x^2(1+4x)}{2} \qquad (2)\ \frac{x^3+x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x+1$$

$$(3)\ x^6 + 3x^3 + 2 = 0 \qquad (4)\ \frac{(2-x^4)(x^4+2)}{3} = -5x^4 - 4$$

Esercizio 3.2. Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti equazioni ammettono le soluzioni indicate:

$$(1)\ 2x^3 - ax^2 - 5a^2x - 2a^3 \qquad x = -2$$

$$(2)\ x^4 - (a^2+2a)x^2 + (2a^3+1)x^2 - (a^2+2a)x + 2a^3, \qquad x = -1$$

Esercizio 3.3. Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la seguente equazione abbia una soluzione unica, e calcolarla:

$$4x^2 + ax + 1 = 0$$

Esercizio 3.4. Utilizzare un appropriato cambio di variabile per risolvere le seguenti equazioni:

$$(1)\ 2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \qquad (2)\ 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

Esercizio 3.5. Risolvere queste equazioni con frazioni algebriche:

$$(1)\ \frac{2}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = 2 \qquad (2)\ 8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$$

$$(3)\ \frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2 \qquad (4)\ \frac{x-1}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

Esercizio 3.6.

(1) $|3-|x||+2x=0$

(2) $x+\sqrt{x}-2=0$

(3) $|x-1|-16=\sqrt{2x+1}$

(4) $(x+2)^2=(2x-1)^2$

(5) $\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{5-\sqrt{x}}{3}$

(6) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1$

(7) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-2}=2$

(8) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1$

(9) $\sqrt{|x-2|}=x-4$

(10) $\dfrac{1}{|x-2|}+\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{1}{2}$

(11) $||x|-4|=|x|$

(12) $\sqrt[3]{x}=-\sqrt{|x|}$

3.6 Soluzioni agli esercizi

Esercizio 3.1: (1) $x \in \left\{-1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, (2) $x \in \left\{-2, -1, \frac{3}{2}\right\}$

(3) $x \in \left\{-1, -\sqrt[3]{2}\right\}$, (4) $x \in \{\pm 2\}$

Esercizio 3.2: (1) $a \in \{-1, 2, 4\}$, (2) $a = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Esercizio 3.3: (1) $a \in \{\pm 4\}$, (2) $a = 4 \to x = -\frac{1}{2}$, $a = -4 \to x = \frac{1}{2}$

Esercizio 3.4: (1) $x \in \left\{\pm 1, -\frac{1}{2}, 2\right\}$, (2) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

Esercizio 3.5: (1) $x \in \left\{-1, \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$, (2) $x \in \{\pm 1\}$

(3) $x \in \left\{-\frac{4}{3}, 3\right\}$, (4) $x = -2$

Esercizio 3.6: (1) $x = -1$, (2) $x = 1$, (3) $x = 24$, (4) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$ (5) $x = 4$

(6) $x = 9$, (7) $x \in \{2, 6\}$, (8) $x = 8$, (9) $x = 6$, (10) $x \in \{\pm\sqrt{2}, 2 + \sqrt{6}\}$,

(11) $x \in \{\pm 2\}$, (12) $x \in \{0, -1\}$.

Capitolo 4

Disequazioni

4.1 L'ordine dei numeri reali

Le principali proprietà della relazione d'ordine " $\leqslant$ " dei numeri reali sono

- ⧫ Riflessiva: $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$.
- ⧫ Antisimmetrica: $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $y \leqslant x \Rightarrow x = y$.
- ⧫ Transitiva: $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.
- ⧫ Ordine totale: $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$ oppure $x \geqslant y$.

Le altre due regole importanti per lavorare con le disuguaglianze sono le relazioni con la somma e il prodotto:

- ⧫ Monotonia rispetto alla somma:

$$x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x + z \leqslant y + z$$

- ⧫ Monotonia rispetto al prodotto per numeri positivi:

$$x, y, z \in \mathbb{R}, \quad z > 0, \quad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad xz \leqslant yz$$

Da queste proprietà si possono facilmente dedurre le seguenti regole, che saranno utili per la manipolazione delle disuguaglianze:

- $x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad -x \geqslant -y.$
- $x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y > 0, \quad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}.$

4.2 Disequazioni lineari

Una **disequazione** è una disuguaglianza tra espressioni algebriche. In particolare, una **disequazione polinomiale** è qualsiasi disequazione che possa essere scritta come

$$P(x) \leqslant 0, \quad \text{oppure} \quad P(x) < 0,$$

con $P(x)$ un polinomio (si noti che questa definizione include anche $\geqslant$ e $>$, basta cambiare il segno di $P(x)$).

Quando manipoliamo le disuguaglianze dobbiamo prestare molta più attenzione di quando lo facciamo con le uguaglianze, perché è facile sbagliare la direzione della disuguaglianza o alterare l'insieme delle soluzioni. Quando possibile, ci limiteremo all'uso delle quattro proprietà indicate prima.

Le **disuguaglianze lineari o di primo grado** sono l'esempio più semplice e corrispondono al caso in cui $P(x)$ è di grado 1:

$$ax + b \overset{(<)}{\leqslant} 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

A differenza delle equazioni di primo grado, una formula diretta per calcolare le loro soluzioni sarebbe poco pratica a causa dell'ampia varietà di casi da distinguere. Per risolverli, le semplificheremo utilizzando le equivalenze che sappiamo.

Esempio.

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{3} > -\frac{x}{6} + 1$$

Moltiplichiamo l'equazione per 6 per eliminare i denominatori. Come $6 > 0$, la direzione della disuguaglianza si mantiene:

$$3x + 4 > -x + 6$$

Operiamo per lasciare la parte letterale da una parte e quella numerica dall'altra. Ricordiamo che la somma e la sottrazione della stessa quantità su entrambi i lati di una disuguaglianza produce una equivalente. Poi dividiamo per 2:

$$4x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è $\left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Un esempio un po' più impegnativo. Determinare in funzione del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$ax + 3 \leqslant 2 - x$$

Isoliamo i termini con x:

$$(a + 1)\, x \leqslant -1$$

Per trovare x dobbiamo dividere per $a + 1$, ma non conosciamo il suo segno! Quindi è necessario distinguere i casi:

- Se $a + 1 > 0$, la disuguaglianza non cambia quando si divide:

$$x \leqslant \frac{-1}{a+1}$$

- Se invece $a+1 < 0$, il verso del simbolo della disuguaglianza cambia quando si divide per $a + 1$:

$$x \geqslant \frac{-1}{a+1}$$

- Se $a + 1 = 0$, allora $a = 1$ e la disequazione equivale a $3 \leqslant 2$, che non è mai sodisfata.

Soluzioni: $\left]-\infty, \frac{-1}{a+1}\right]$ se $a > -1$, e $\left[\frac{-1}{a+1}, +\infty\right[$ se $a < -1$.

4.3 Disequazioni di ordine superiore

In questa sezione studiamo le disequazioni del tipo

$$P(x) \leqslant 0, \quad P(x) < 0$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado maggiore di 1. Come per le equazioni polinomiali di grado alto, la nostra strategia sarà cercare di fattorizzare il polinomio $P(x)$, e studiare il suo segno attraverso il segno dei suoi fattori grazie alle regole per il segno del prodotto che conosciamo.

Anche in questo caso, è impossibile presentare una formula che copra tutti i casi, quindi cercheremo di dedurre le idee principali attraverso vari esempi.

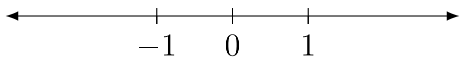
Esempio.

$$x^3 < x$$

Sottraiamo x da entrambi i lati per ridurre l'equazione alla forma di prima, e fattorizziamo il polinomio di grado 3 risultante:

$$x^3 - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) < 0$$

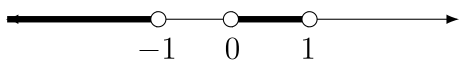
Le radici dividono la retta reale in 4 intervalli aperti in cui il polinomio ha segno costante, perché se cambiasse segno ci sarebbe un'altra radice e sappiamo che un polinomio di grado 3 non può avere più di 3 radici.



Determiniamo i segni dei fattori in ogni sottointervallo e deduciamo il segno del polinomio come prodotto dei segni dei suoi fattori.

$$\begin{aligned}
\text{Se} \quad x < -1 \qquad & \underbrace{x}_{-}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x+1)}_{-} < 0 \\
\text{Se} \quad -1 < x < 0 \qquad & \underbrace{x}_{-}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x+1)}_{+} > 0 \\
\text{Se} \quad 0 < x < 1 \qquad & \underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x+1)}_{+} < 0 \\
\text{Se} \quad x > 1 \qquad & \underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x+1)}_{+} > 0
\end{aligned}$$

quindi l'insieme di soluzioni è $]-\infty, -1[\ \cup\ ]0, 1[$. Siccome la disuguaglianza è stretta, non aggiungiamo gli estremi degli intervalli, dove il polinomio è zero.



Importante! Poiché non conosciamo il segno di x, non possiamo semplicemente dividere la disequazione originale per x o modificheremo l'insieme delle soluzioni:

$$x^3 < x \quad \Rightarrow \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow x \in \ ]-1, 1[$$

Sbagliato!

Possiamo vedere che $x = \dfrac{-1}{2}$ non è una soluzione della disequazione originale.

Esempio.

$$-x^3 + 3x - 2 \leqslant 0$$

In generale è più comodo lavorare con un coefficiente direttivo positivo, quindi moltiplichiamo per (-1) la disequazione, cambiando il verso della disuguaglianza.

$$x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$$

Procediamo come prima. In questo caso troviamo una doppia radice:

$$x^3 - 3x + 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-1)^2 \geqslant 0$$

$$\begin{array}{rr} \text{Se} \quad x < -2 & \underbrace{(x+2)}_{-}\underbrace{(x-1)^2}_{+} < 0 \\ \text{Se} \quad -2 < x < 1 & \underbrace{(x+2)}_{+}\underbrace{(x-1)^2}_{+} > 0 \\ \text{Se} \quad x > 1 & \underbrace{(x+2)}_{+}\underbrace{(x-1)^2}_{+} > 0 \end{array}$$

La disuguaglianza non è stretta, quindi aggiungiamo anche le radici.

Soluzioni: $x \in [-2, +\infty[$

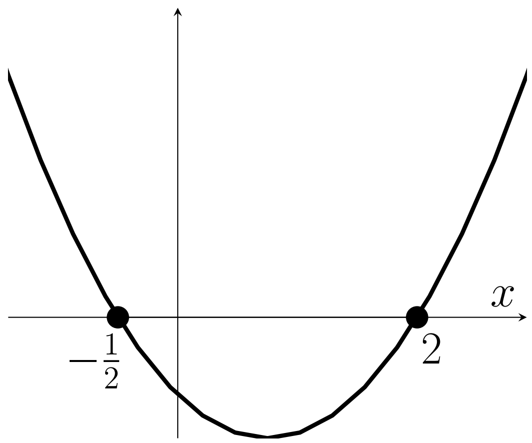
Nel caso particolare dei polinomi di grado 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$, sappiamo che il suo grafico descrive una parabola convessa se $a > 0$, e concava se $a < 0$, ed è facile risolvere disequazioni in base al numero di soluzioni e al segno del coefficiente direttivo.

Esempio.

$$2x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$$

Poiché il coefficiente direttivo è positivo, il grafico del polinomio è una parabola convessa. Il numero di tagli con l'asse OX viene determinato dal numero di soluzioni.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$



In questo caso, il polinomio è minore o uguale a zero tra le sue due radici. Dato che la disuguaglianza non è stretta, includiamo i punti in cui il polinomio è nullo:

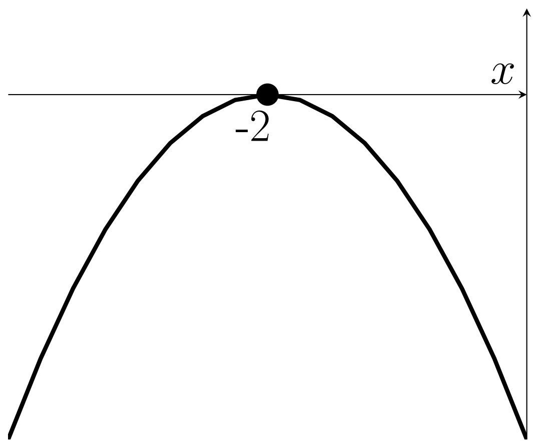
$$x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

Esempio.

$$-x^2 - 4x - 4 < 0$$

Il grafico è una parabola concava che taglia l'asse x in un unico punto:

$$-x^2 - 4x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$



Soluzioni: $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-2, +\infty\right[$

4.4 Sistemi di disequazioni con un'incognita

Un sistema di disequazioni con un'incognita è un insieme di due o più disequazioni. Per risolverle, risolviamo una per una tutte le disequazioni che la formano e intersechiamo gli insiemi di soluzioni.

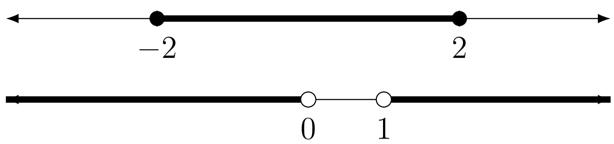
Esempio.

$$\begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases}$$

Risolviamo ogni disequazione individualmente:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{\pm 2\} \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 - 4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2, 2] \right)$$

$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 1\} \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\right)$$



La soluzione del sistema è l'intersezione dei due insiemi di soluzioni:

$$x \in [-2, 0[\cup]1, 2]$$

4.5 Disequazioni fratte

Una **inequazione fratta** è una disuguaglianza in cui l'indeterminata compare in un denominatore. Qui ci concentreremo sullo studio delle disuguaglianze fratte razionale, che sono quelle che possono sempre essere scritte nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi e $\deg(Q(x)) \geqslant 1$. Per risolverli, studiamo singolarmente il segno del numeratore e del denominatore, tenendo presente che i valori che annullano il denominatore sono sempre esclusi.

Esempio.

$$\frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} \geqslant -2$$

In questo caso non possiamo semplicemente eliminare i denominatori moltiplicandoli per il loro minimo comune multiplo, perché non sappiamo che segno abbia.

Invece, riduciamo le frazioni a un denominatore comune e operiamo per ottenere un'unica frazione in confronto con lo zero.

$$\frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} + 2 \geqslant 0$$

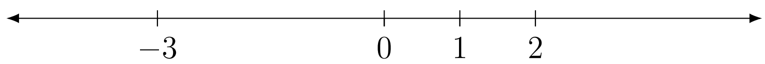
$$\frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} + 2 = \frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} + 2 \cdot \frac{3-2x-x^2}{3-2x-x^2} = \frac{x^2-2x}{3-2x-x^2}$$

Quindi,

$$\frac{3x^2+2x-6}{3-2x-x^2} \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x}{3-2x-x^2} \geqslant 0$$

Si fattorizzano il numeratore e il denominatore per calcolare le loro radici e dividiamo la retta reale in sottointervalli separati da queste:

$$\begin{aligned} x^2-2x &= x(x-2) \quad \rightarrow \quad \text{Radici: } \{0,2\} \\ 3-2x-x^2 &= -(x+3)(x-1) \quad \rightarrow \quad \text{Radici: } \{-3,1\} \end{aligned}$$



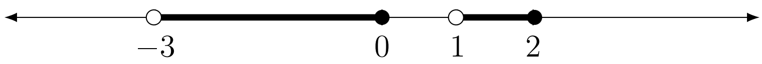
Calcoliamo il segno del quoziente in ogni intervallo utilizzando la regola del segno per il prodotto e il quoziente:

$$\text{Se } x < -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x}^{-}\ \overbrace{(x-2)}^{-}}{-\underbrace{(x+3)}_{-}\ \underbrace{(x-1)}_{-}} < 0$$

$$\text{Se } -3 < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x}^{-}\ \overbrace{(x-2)}^{-}}{-\underbrace{(x+3)}_{+}\ \underbrace{(x-1)}_{-}} > 0$$

... e così via. Poiché la disuguaglianza non è stretta, gli zeri del numeratore, $\{0, 2\}$, sono ammessi.

Soluzioni:



$$x \in]-3, 0] \cup]1, 2]$$

4.6 Disequazioni con valore assoluto

Si intende per **disequazione con valore assoluto** qualsiasi disuguaglianza tra due espressioni algebriche in cui l'indeterminata compare almeno una volta sotto un valore assoluto. A differenza del resto delle disuguaglianze che abbiamo visto, **il senso della disuguaglianza originale è un fatto da tenere in considerazione.** Noi qui studieremo le disequazioni della forma

$$|P(x)| \leqslant Q(x), \quad |P(x)| \geqslant Q(x),$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi con $\deg(P(x)) \geqslant 1$, e anche le loro rispettive versioni con disuguaglianze strette.

Per studiare il primo tipo di equazione, passiamo a una formulazione equivalente in forma di sistema grazie alle proprietà del valore assoluto:

$$|P(x)| \leqslant Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad -Q(x) \leqslant P(x) \leqslant Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \leqslant Q(x) \\ P(x) \geqslant -Q(x) \end{cases}$$

e lo stesso vale cambiando $\leqslant$ con $<$. Per il secondo tipo di disequazione utilizzeremo il fatto che la relazione d'ordine dei numeri reali è totale e la ridurremo al caso precedente:

$$x \text{ non è soluzione di } |P(x)| \geqslant Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ è soluzione di } |P(x)| < Q(x),$$

quindi

$$\{x \in \mathbb{R} : |P(x)| \geqslant Q(x)\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : |P(x)| < Q(x)\}.$$

Esempio.

$$x^2 - 1 \leqslant |x - 1|$$

Possiamo notare che questa disequazione è del secondo tipo, quindi il modo più semplice è studiare la disequazione opposta, che è quella che soddisfano i punti che non sono soluzioni della disequazione originale.

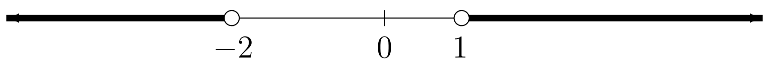
$$x^2 - 1 \leqslant |x-1| \xrightarrow{\text{Disequazione opposta}} x^2 - 1 > |x-1|$$

Eliminiamo il valore assoluto passando a un sistema equivalente:

$$x^2 - 1 > |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 < x^2 - 1 \\ x - 1 > 1 - x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x-1) > 0 \\ (x+2)(x-1) > 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema, risolviamo ogni disequazione e intersechiamo l'insieme delle sue soluzioni:

$$\begin{aligned} x(x-1) > 0 \quad &\rightarrow \quad x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[\\ (x+2)(x-1) > 0 \quad &\rightarrow \quad x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]1, \infty[\end{aligned}$$



Abbiamo verificato che le soluzioni della disequazione opposta sono:

$$x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]1, \infty[$$

Quindi, le soluzioni dell'equazione originale sono

$$x \in [-2, 1]$$

4.7 Esercizi del capitolo 4

Esercizio 4.1. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(1)\ \frac{x^2+2x}{3}+\frac{5x}{12}>\frac{3x+1}{4} \qquad (2)\ x^4-2x^2+1\leqslant 0$$

$$(3)\ \frac{x^2(x-1)}{2}-\frac{x}{6}\leqslant\frac{x(x^2-4)}{3} \qquad (4)\ \frac{2x+1}{2}-\frac{x}{5}>\frac{5x-x^2}{5}$$

Esercizio 4.2. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$(1)\ \begin{cases} 1-x-2x^2\geqslant 0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x^2-2x-3\geqslant 0 \\ x^2-x-6\leqslant 0 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x>0 \\ x^2\geqslant 1 \\ 2x^2+x-6<0 \end{cases}$$

Esercizio 4.3. Risolvere la seguente disequazione con frazioni algebriche:

$$\frac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-1}\geqslant 0$$

Esercizio 4.4. Determinare, in funzione del parametro $a\in\mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$(1)\ \frac{ax+2}{4}-\frac{x-1}{2}<2 \qquad (2)\ (x-a)(x^2-1)\leqslant 0$$

Esercizio 4.5. Determinare per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ il polinomio seguente ha due radici diverse:

$$x^2+ax+3-a$$

Esercizio 4.6. Risolvere le seguenti disequazioni con valore assoluto:

$$(1)\ \ |x-2|+x^2<2 \qquad (2)\ \ |x^2-2|\geqslant x$$

Esercizio 4.7. Trovare l'insime delle soluzioni delle disequazioni

$$(1)\ \frac{1-|2x-3|}{x-9}\geqslant 0 \qquad (2)\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{x}>0$$

Esercizio 4.8. Dimostrare che la disuguaglianza triangolare $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ è un'uguaglianza se e solo se x e y hanno lo stesso segno o uno dei due è zero.

Esercizio 4.9. Dimostrare che $500^{999}>999!$, dove $999!=999\cdot 998\cdot 997\cdots 2\cdot 1$

4.8 Soluzioni agli esercizi

Esercizio 4.1: (1) $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\ \cup \ \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, (2) $x \in \{\pm 1\}$,

(3) $x \in]-\infty, 0[$, (4) $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.2: (1) Nessuna soluzione $x \in \varnothing$, (2) $x \in [-2,-1] \cup \{3\}$, (3) $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[$

Esercizio 4.3: $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [0,1[\cup [2,+\infty[$

Esercizio 4.4:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Se } a = 2, & x \in \mathbb{R}, \\ \text{Se } a > 2, & x \in \left]-\infty, \dfrac{4}{a-2}\right[, \\ \text{Se } a < 2, & x \in \left]\dfrac{4}{a-2}, +\infty\right[. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Se } a < 1, & x \in]-\infty, a] \ \cup \ [-1,1], \\ \text{Se } a = -1, & x \in]-\infty, 1] \\ \text{Se } -1 < a < 1, & x \in]-\infty,-1] \ \cup \ [a,1], \\ \text{Se } a = 1, & x \in]-\infty,-1] \cup \{1\} \\ \text{Se } a > 1, & x \in]-\infty,-1] \ \cup \ [1,a]. \end{cases}$$

Esercizio 4.5.: $a \in]-\infty,-6[\cup]2,+\infty[$

Esercizio 4.6.: (1) $x \in]0,1[$, (2) $x \in]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$

Esercizio 4.7: (1)$x \in]-\infty,1] \cup [2,9[$, (2) $x \in [2,+\infty[$