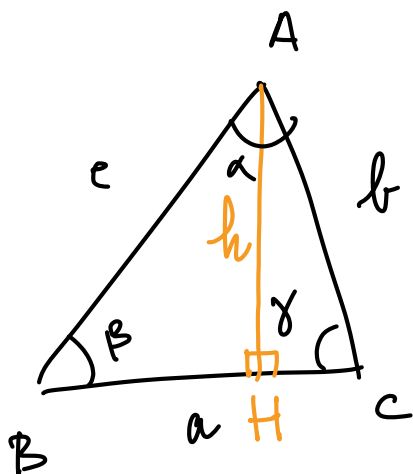


12/09/2022

Un po' di richiami:

Sia $\triangle ABC$ un triangolo nel piano euclideo

Vale la seguente relazione:

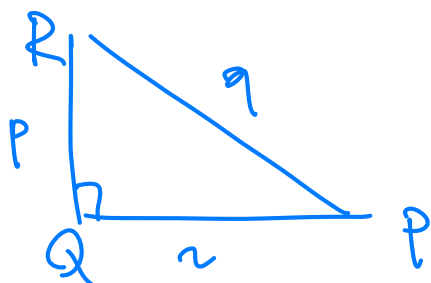
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Osservazione: se $\gamma = 90^\circ \Rightarrow \cos \gamma = 0$ e trovo il teorema di Pitagora

Risoliamo il teorema di Pitagora:

se $\triangle PQR$ è retto in Q

allora $q^2 = p^2 + r^2$



Grazie a Pitagora:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + (a - b \cos \gamma)^2 \\ b^2 = h^2 + (b \cos \gamma)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2 = c^2 - (a - b \cos \gamma)^2 \\ h^2 = b^2 - b^2 \cos^2 \gamma \end{cases}$$

$$c^2 - (a - b \cos \gamma)^2 = b^2 - b^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 - a^2 - \cancel{b^2 \cos^2 \gamma} + 2ab \cos \gamma = b^2 - \cancel{b^2 \cos^2 \gamma}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Da questa relazione posso ricavare la regola dei seni

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

• Infatti $h = c \sin \beta = b \sin \gamma$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta}$$

• Altro modo: $(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1)$

$$\left(\frac{\sin \gamma}{c} \right)^2 = \frac{1 - \cos^2 \gamma}{c^2} = (*)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \iff \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\textcircled{*} = \frac{1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}}{c^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{NUMERATORE} &= 4a^2b^2 - [a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 \\ &\quad - 2b^2c^2] \\ &= -[a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2] \end{aligned}$$

Perché sia il numeratore che il denominatore sono simmetrici in a, b e c allora il risultato non cambia se calcoli $\left(\frac{\sin \beta}{b}\right)^2 \circ \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right)^2$.

Provare a fare per esercizio lo stesso conto di prima con $\frac{\sin \beta}{b} \circ \frac{\sin \alpha}{a}$.

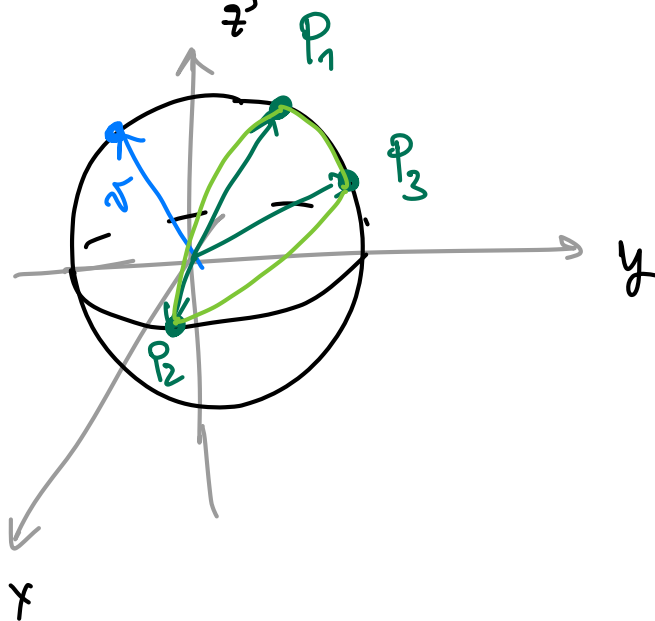
Elementi di geometria sferica

$$\begin{aligned} S^2 &= \{ p \mid d(0, p) = 1 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \end{aligned}$$

Descrive la superficie della sfera di centro 0 e raggio 1

Con il linguaggio dei vettori

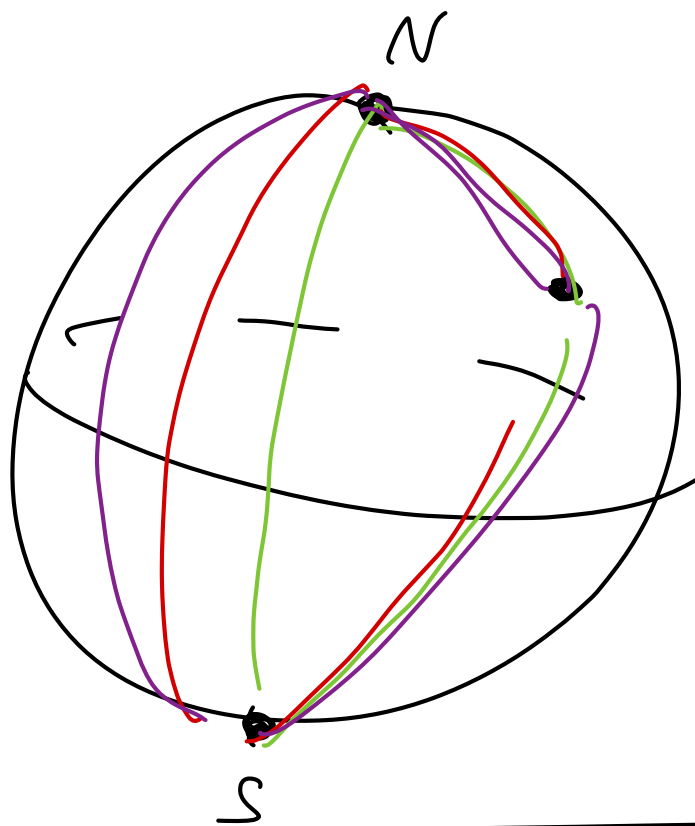
$$S^2 = \{v \mid \|v\| = 1\}$$



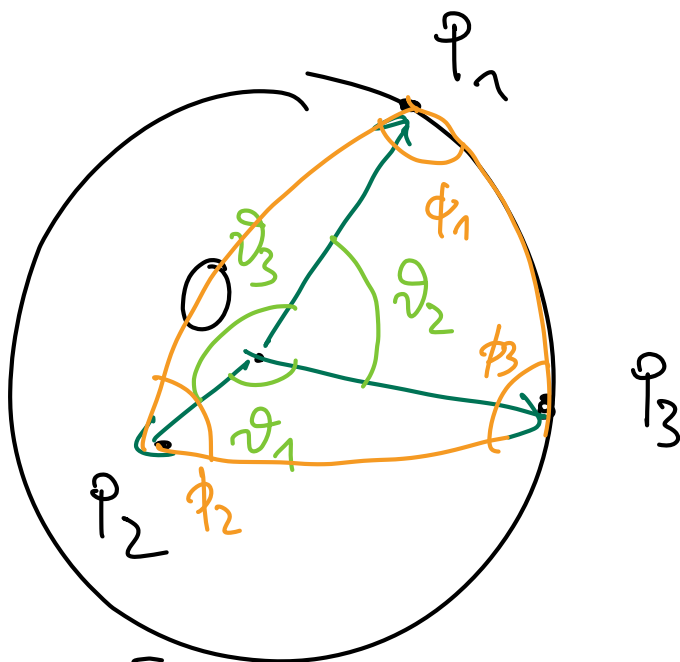
Tre punti P_1, P_2, P_3 su S^2 , identificati con rispettivi vettori v_1, v_2, v_3 , definiscono un triangolo sferico se

$$\Delta := \langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle \neq 0$$

I lati di un triangolo sferico sono dati dall'intersezione fra il piano definito da due vertici e l'origine con la sfera stessa.



$$\vartheta_1 = \widehat{P_2 O P_3} \quad \vartheta_2 = \widehat{P_3 O P_1} \quad \vartheta_3 = \widehat{P_1 O P_2}$$



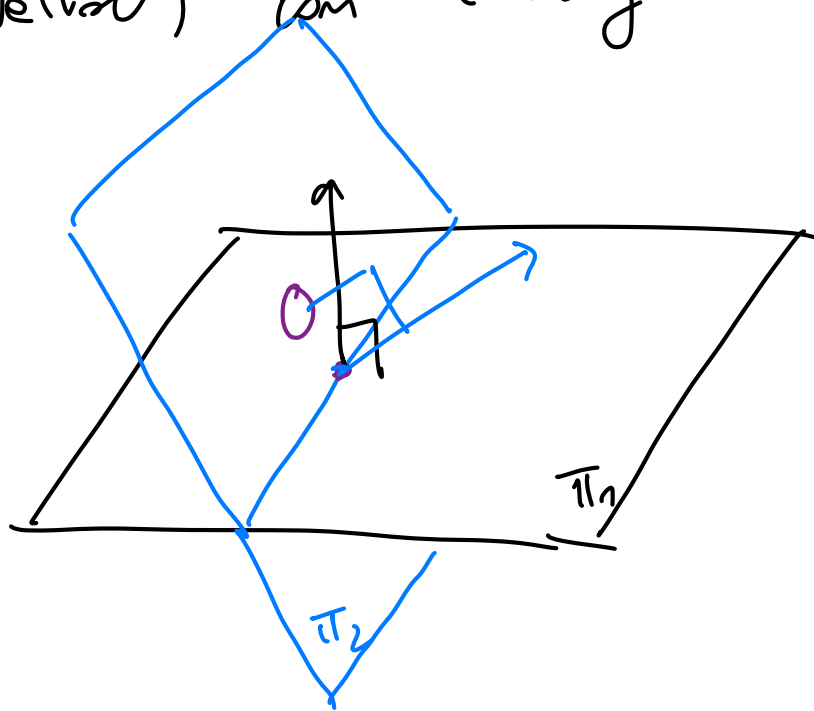
$$\cos \vartheta_1 = \left\langle \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} \right\rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = c_1$$

↑
perché prima
abbiamo detto che $\|\vec{v}\|=1$

$$c_2 = \cos \vartheta_2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$$

$$c_3 = \cos \vartheta_3 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

L'idea, per calcolare gl' angoli interni, è quella di valutare gl' angoli fra i piani definiti da i punti (o vettori) con l'origine.



Gl' angoli interni saranno quindi

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 definiti da

$$\cos \phi_1 = - \frac{\langle w_2, w_3 \rangle}{\|w_2\| \|w_3\|}$$

dove

$$w_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

$$w_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$$

$$w_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$$

$$\cos \phi_2 = - \frac{\langle W_1, W_3 \rangle}{\|W_1\| \|W_3\|}, \quad \cos \phi_3 = - \frac{\langle W_1, W_2 \rangle}{\|W_1\| \|W_2\|}.$$

Esercizio: Calcolare

$\langle W_k, W_h \rangle = ?$ al variare
di $h, k = 1, 2, 3$

$$\langle W_1, W_1 \rangle = 1 - c_1^2 \quad \dots \dots$$

$$\langle W_1, W_2 \rangle = c_1 c_2 - c_3$$

$$-\cos \phi_3 = \frac{\langle W_1, W_2 \rangle}{\|W_1\| \|W_2\|} = \frac{c_1 c_2 - c_3}{\sin \vartheta_1 \cdot \sin \vartheta_2} = \textcircled{x}$$

$$\|v_2 \times v_3\| = \underbrace{\|v_2\|}_1 \underbrace{\|v_3\|}_1 \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_1$$

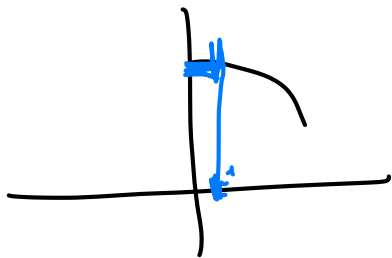
$$\textcircled{x} = \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_3}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \vartheta_3 = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdot \cos \phi_3}$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{in} \quad \sin x \approx x$$

per x piccoli

per x piccoli $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$



Quindi per un triangolo "piccolo" rispetto alle misure della sfera, posso approssimare $\sin \vartheta \approx \vartheta$ e $\cos \vartheta \approx 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2$

$$1 - \frac{1}{2}\vartheta_3^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\vartheta_2^2\right) + \vartheta_1\vartheta_2 \cos \phi_3$$

~~$$1 - \frac{1}{2}\vartheta_3^2 = 1 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 + \frac{1}{4}\vartheta_1^2\vartheta_2^2 + \vartheta_1\vartheta_2 \cos \phi_3$$~~

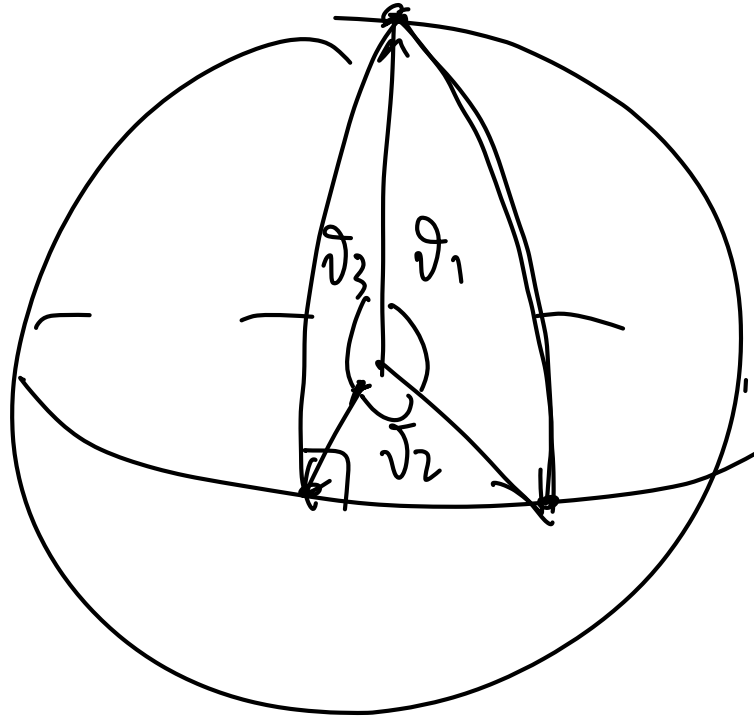
$$\frac{1}{2}\vartheta_3^2 = \frac{1}{2}\vartheta_1^2 + \frac{1}{2}\vartheta_2^2 - \vartheta_1\vartheta_2 \cos \phi_3$$

*molto piccoli
= 1 lo cancello*

$$\vartheta_3^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 \cos \phi_3$$

Trovo la formula di prima.
Questa formula diventava il teorema di Pitagora se $\phi_3 = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos \vartheta_3 = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2$ è l'analogo
del teor. di Pitagora per
triangoli sferici



• l'area di un triangolo sferico
di angoli interni ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 è
però a

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \pi \geq 0$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \geq \pi$$

① A partire dalle relazioni

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

dedurre che $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

② Verificare che i quattro punti

$$(0, \sqrt{2}, 1), (0, -\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 0, -1), (-\sqrt{2}, 0, -1)$$

appartengono ad una sfera centrata in O (di quale raggio?).

Verificare che le distanze reciproche fra due qualsiasi di questi punti sono uguali. Che figura formano?

③ Supponiamo che $\triangle ABC$ sia un triangolo

isoscele con $a = b = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 90^\circ$.

Quanto misura l'ipotenusa c

• nel piano? • su S^2 ?

④ Utrare la regolo dei coseni
sulla sfera per mostrare che
 $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 \gamma$ può essere espresso
come una relazione simmetrica fra
 $\cos a$, $\cos b$ e $\cos c$. Dedurre la regolo
dei seni sferici:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$