

Vettori in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^n)$

8/9/2022
MATTINA

	Co2	
Boi	20.	
Bini'si	10	$(20, 10, 15, 30) \neq$
Como	15	$(10, 20, 15, 30)$
Milano	30	

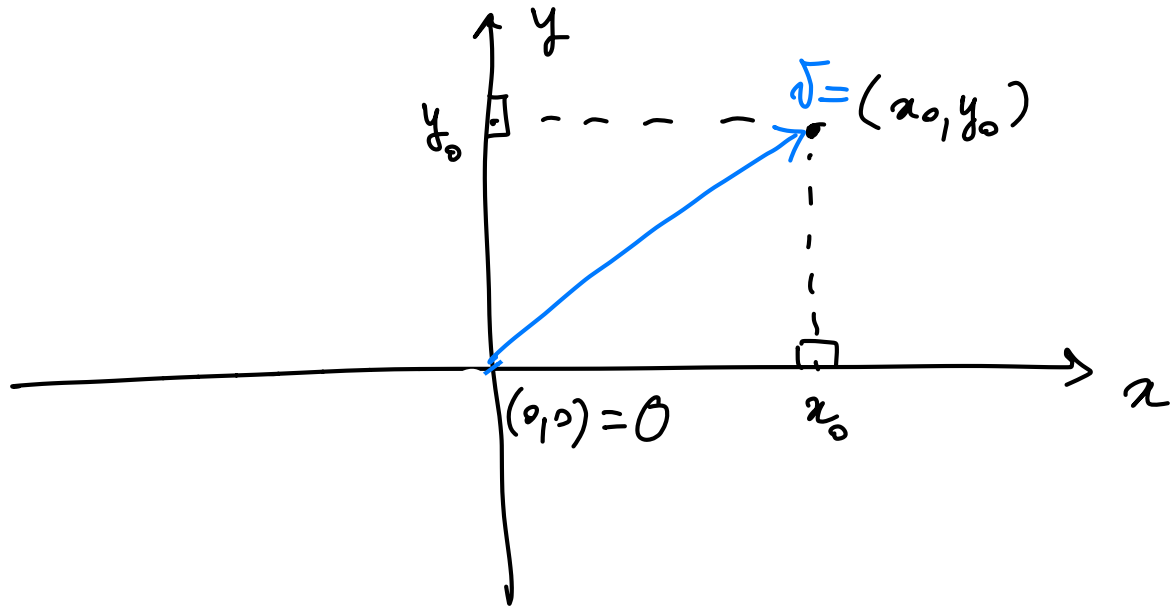
$$\{20, 10, 15, 30\} = \{10, 20, 15, 30\}$$

↑ } intensità
↓
↗ direzione e verso.

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

↑
tale che



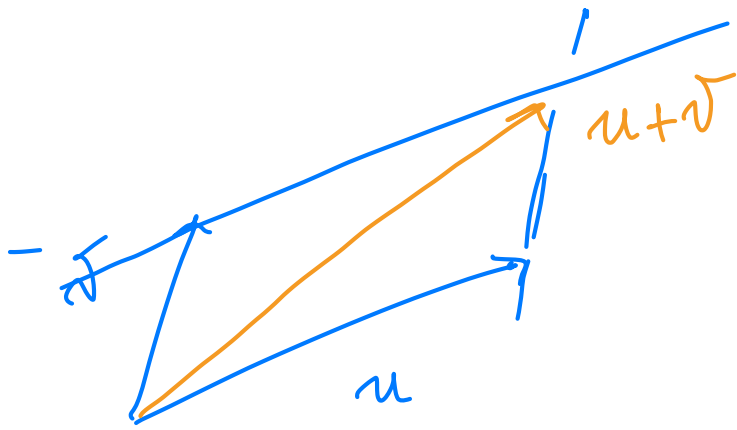
Osservazione: interpretato $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ come insieme di "freccie" che partono da O .

Ogni freccia v la posso identificare con le sue coordinate rispetto agli assi $v = (x_0, y_0)$

Introduco due operazioni: somma e prodotto PER scalare

SOMMA: siano u e v due vettori
 $u = (x_u, y_u)$, $v = (x_v, y_v)$.

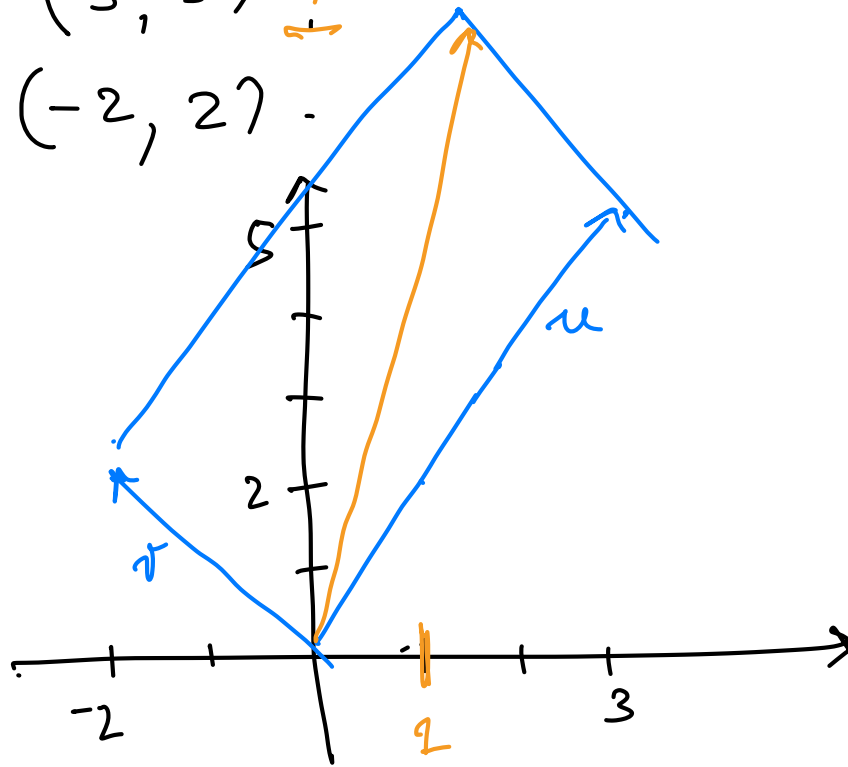
Definisco $u + v := (x_u + x_v, y_u + y_v)$



(Es)

$$u = (3, 5)$$

$$v = (-2, 2)$$



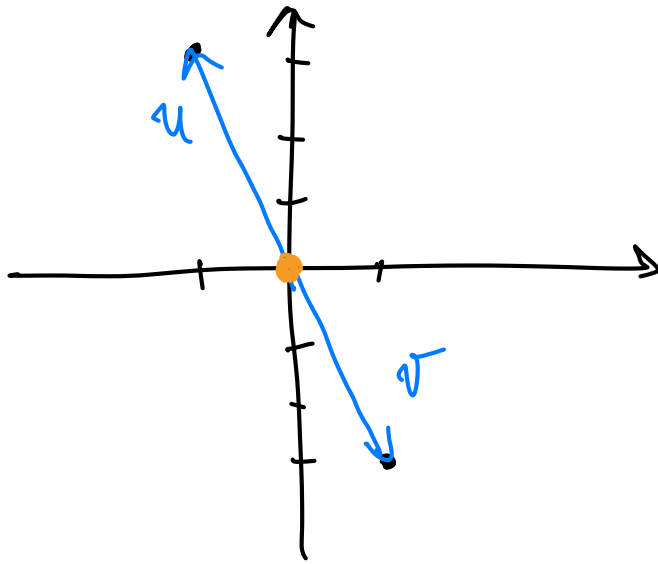
$$u + v = (3 - 2, 5 + 2) = (1, 7)$$

(Es) Cosa succede se i vettori sono all'incirca

$$u = (-1, 3) \quad v = (4, -3)$$

$$w = (0, 2) \quad s = (0, 5)$$

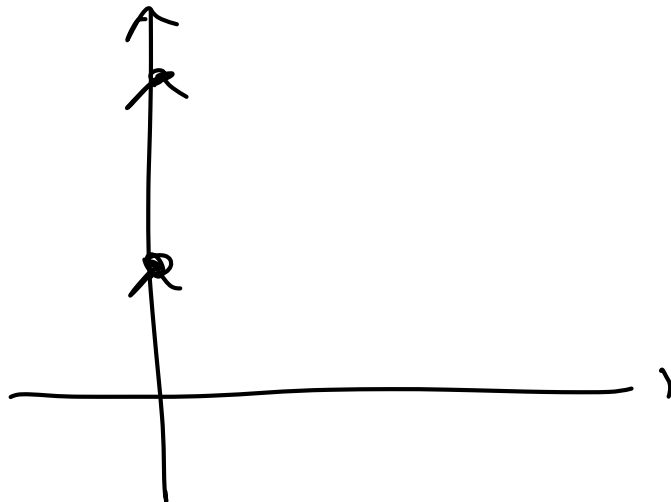




$$u + v = (-1 + 1, 3 - 3) = (0, 0) = \mathbf{0} \text{ nullo}$$

$$w + s = (0 + 0, 2 + 5) = (0, 7)$$

la somma di due vettori allineati
lungo una retta è un vettore ancora
allineato a questi lo si può
ottenere mediante operazioni
standard sui numeri reali.



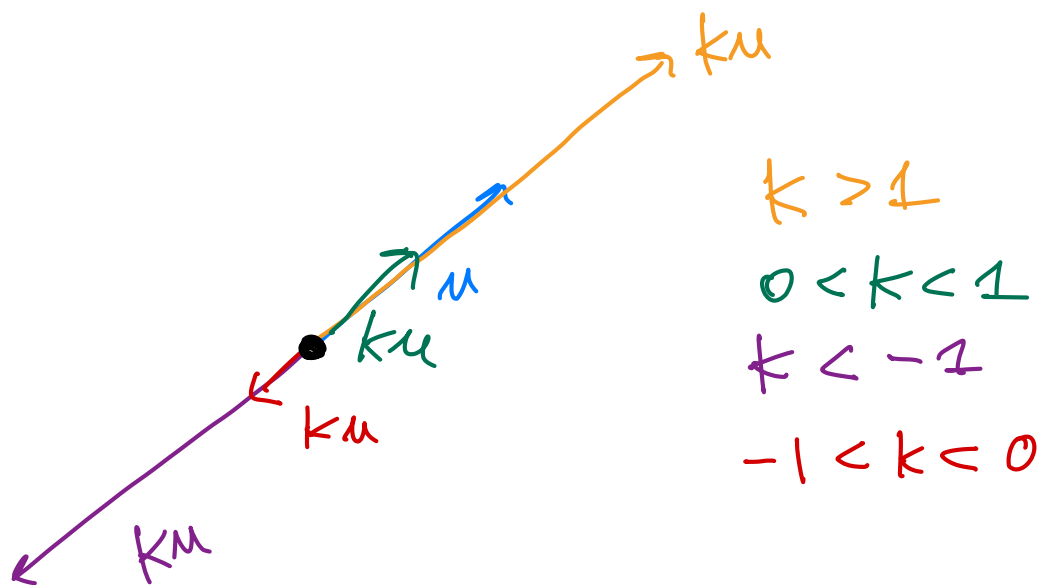
Prodotto PER scalare (è la moltiplicazione di un vettore per un numero "scalare")

Sia $u = (x_u, y_u)$ un vettore
e $k \in \mathbb{R}$ (uno scalare)

Definisco $ku := (kx_u, ky_u)$

(In $\mathbb{R}^3$ vale la stessa definizione

$$k \cdot (x_u, y_u, z_u) = (kx_u, ky_u, kz_u)$$



$$\text{se } k=0 \quad ku = (0, 0, \dots, 0) = 0$$

$$\text{se } k=1 \quad ku = u$$

$$\text{se } k=-1 \quad ku = (-1) \cdot u = -u$$

Osservazione: posso sommare solo vettori dello stesso tipo, cioè con lo stesso numero di componenti. Non posso sommare un vettore di $\mathbb{R}^2$ con uno di $\mathbb{R}^3$

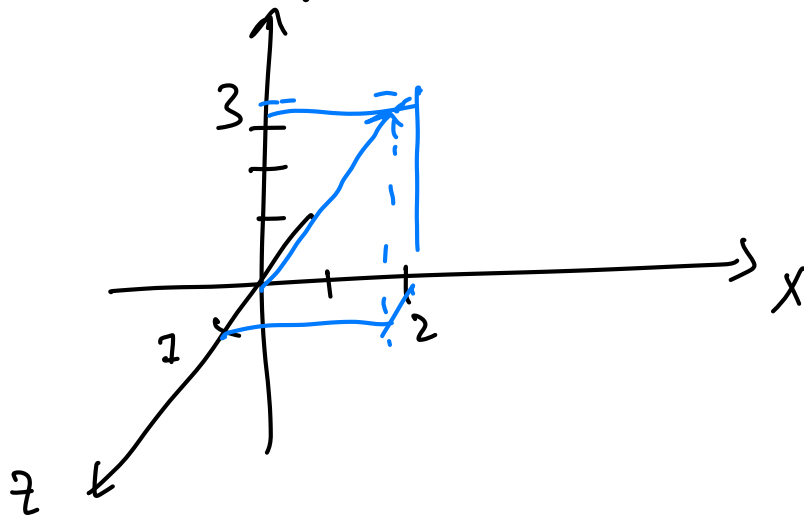
- Due vettori sono uguali se:
 - hanno lo stesso numero di componenti
 - le loro componenti sono uguali ordinatamente

es) $(2, 3, 1) \neq (3, 2, 1)$

FARE DISEGNO

$$\underset{O_{\mathbb{R}^2}}{(0, 0)} \neq \underset{O_{\mathbb{R}^3}}{(0, 0, 0)}$$

Ri prendiamo alle 10.46



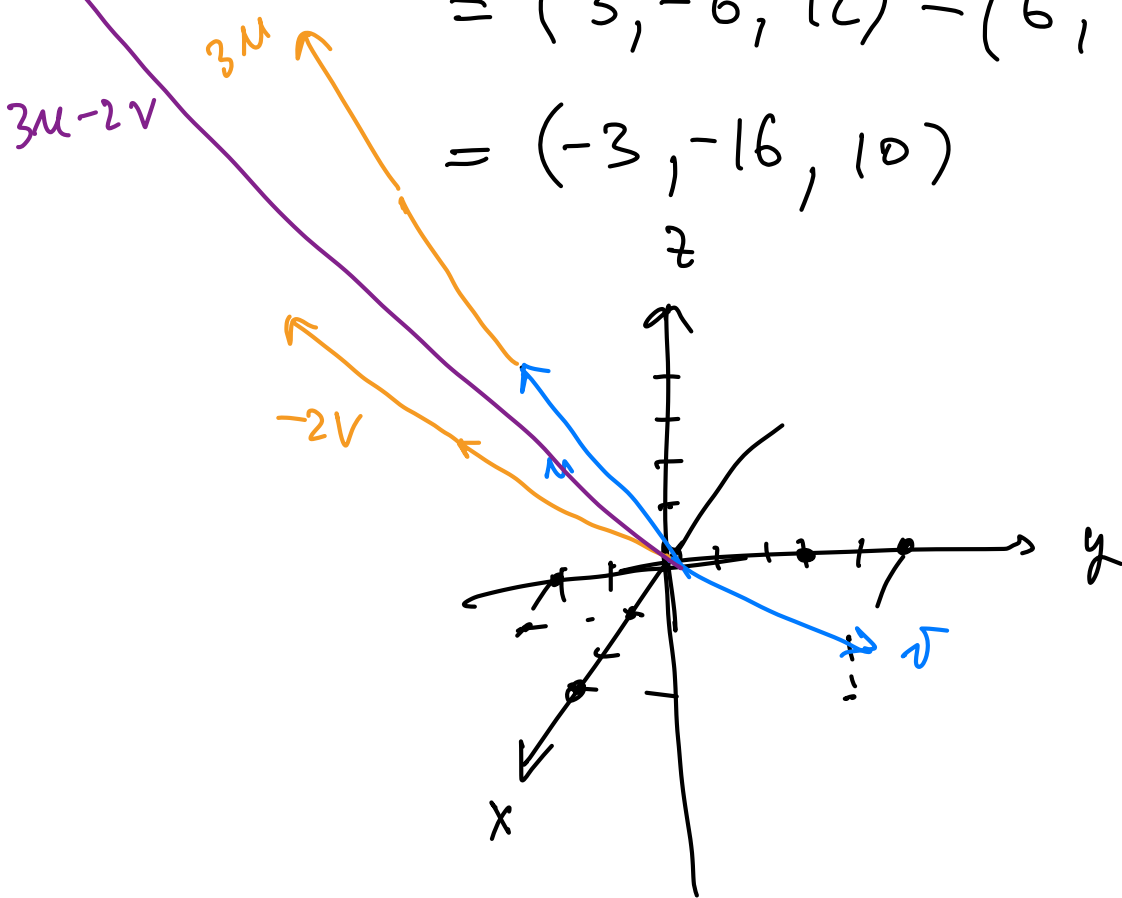
Esercizi:

Si danno $u = (1, -2, 4)$, $v = (3, 5, 1)$, $w = (2, 1, -3)$

Calcolare (a) $3u - 2v$

(b) $5u + 3v - 4w$

(a) $3u - 2v = 3(1, -2, 4) - 2(3, 5, 1)$
 $= (3, -6, 12) - (6, 10, 2)$
 $= (-3, -16, 10)$



(b) $5u + 3v - 4w$

$$5u = 5(1, -2, 4) = (5, -10, 20)$$

$$3v = 3(3, 5, 1) = (9, 15, 3)$$

$$-4w = -4(2, 1, -3) = (-8, -4, 12)$$

$$5u + 3v - 4w = (6, 1, 35)$$

1.46 Trouva x, y in modo che

(a) $(x, y+1) = (y-2, 6)$ (b) $x(2, y) = y(1, -2)$

(a) $x = y - 2 \wedge y + 1 = 6$

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ y + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

(b) $\Leftrightarrow (2x, xy) = (y, -2y)$

$$\Leftrightarrow (2x, xy) - (y, -2y) = (0, 0)$$

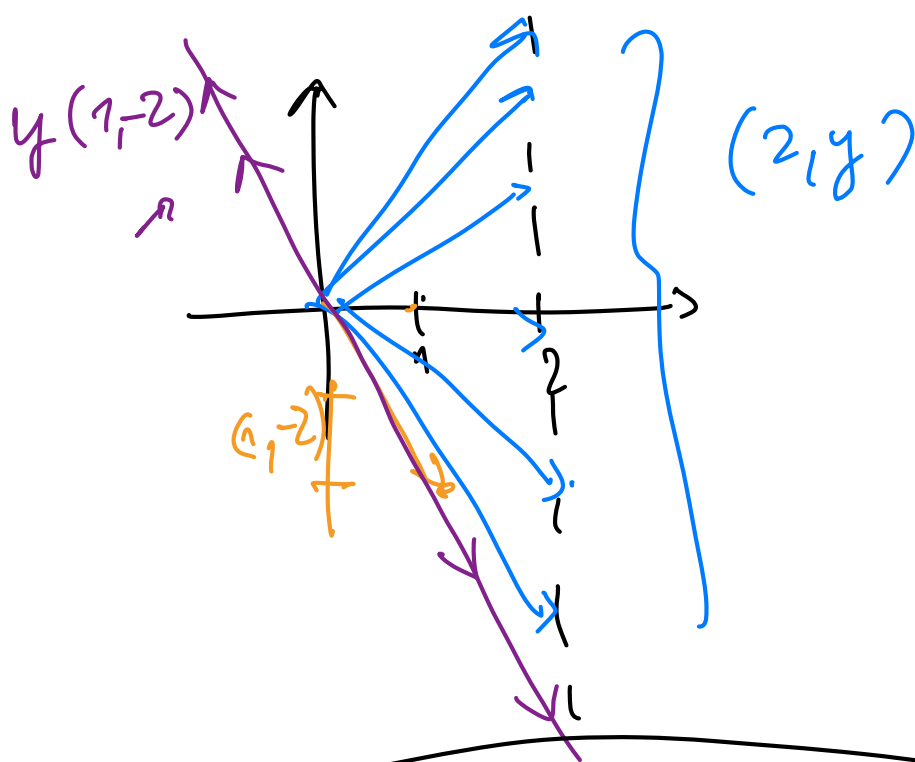
$$\Leftrightarrow (2x - y, xy + 2y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(2x + 4) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = -2 \end{matrix}$$

$$x = 0 \text{ e } y = 2x = 0$$

$$x = -2 \text{ e } y = 2x = -4$$



$$\begin{cases} x = 2x + y \\ y + 1 = 4 \\ y + z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2x + 3 \\ \boxed{y = 3} \\ 3 + z = 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x = -3} \\ \boxed{y = 3} \\ \boxed{z = 3/2} \end{cases}$$

Tenore: se u, v, w sono vettori e

k, k' sono scalari allora

$$\bullet (u+v)+w = u+(v+w)$$

$$\bullet u+0 = u$$

$$\bullet u+(-u) = 0$$

$$\bullet u+v = v+u$$

$$\bullet k(u+v) = ku + kv$$

$$\bullet (k+k')u = ku + k'u$$

$$\bullet (kk')u = k(k'u)$$

$$\bullet 1 \cdot u = u$$

Mostriamo che $(u+v)+w = u+(v+w)$

$$u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$v = (x_v, y_v, z_v)$$

$$w = (x_w, y_w, z_w)$$

$$(u+v)+w = ((x_u, y_u, z_u) + (x_v, y_v, z_v)) + (x_w, y_w, z_w)$$

$$= (x_u+x_v, y_u+y_v, z_u+z_v) + (x_w, y_w, z_w)$$

$$= ((x_u+x_v)+x_w, (y_u+y_v)+y_w, (z_u+z_v)+z_w)$$

$$= (x_u+(x_v+x_w), y_u+(y_v+y_w), z_u+(z_v+z_w))$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= u+(v+w)$$

Dim. che $(k+k')u = ku + k'u$

$$(k+k')u = (k+k')(x_u, y_u, z_u) =$$

$$= ((k+k')x_u, (k+k')y_u, (k+k')z_u)$$

$$= (kx_u+k'x_u, ky_u+k'y_u, kz_u+k'z_u)$$

$$= (kx_u, ky_u, kz_u) + (k'x_u, k'y_u, k'z_u)$$

$$= ku + k'u.$$

Norma (o lunghezza) di un vettore e

angolo fra vettori

Il prodotto scalare (o interno) STANDARD
(NON è un'ies, per questo scegliamo
quello più "bello") fra due vettori

$$u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$v = (x_v, y_v, z_v)$$

è definito come

$$\langle u, v \rangle := x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$u \cdot v$ il risultato è un numero
reale.

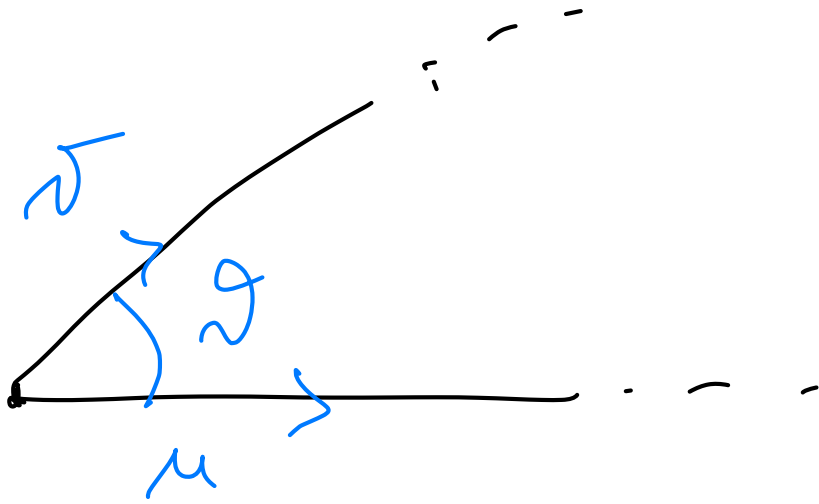
Due vettori si dicono ortogonali se

$$\langle u, v \rangle = 0$$

La norma (o lunghezza) di un vettore
 v è definita come l'unica radice
positiva di $\langle v, v \rangle$, $\sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$

L'angolo ϑ fra due vettori u e v
non nulli è definito come

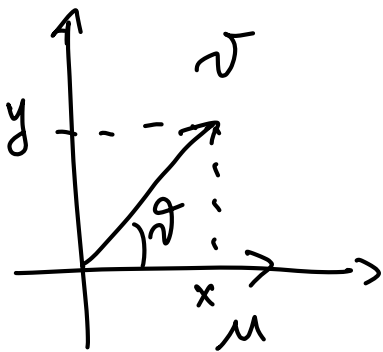
$$\cos \vartheta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$



Esempio:

$$\|u\| = \|v\| = 1 \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$u = (1, 0) \quad v = (x, y)$$



θ è tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \langle u, v \rangle$$

$$= \langle (1, 0), (x, y) \rangle$$

$$= 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$$

Se u non ha lunghezza 1
 posso moltiplicarlo per un appropriato
 numero k tale che ku abbia

lunghezza 1

$$\|ku\| = 1 \iff \|ku\|^2 = 1$$
$$(\sqrt{\langle ku, ku \rangle})^2 = 1$$

$$\langle ku, ku \rangle = 1$$

$$\langle (kx_u, ky_u, kz_u), (kx_u, ky_u, kz_u) \rangle = 1$$

$$k^2 x_u^2 + k^2 y_u^2 + k^2 z_u^2 = 1$$

$$k^2 \underbrace{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)}_{\|u\|^2} = 1$$

$$k^2 \|u\|^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{\|u\|^2}$$

$$k = \pm \frac{1}{\|u\|}$$

Se u non ha lunghezza 1 prendi

$\frac{u}{\|u\|}$ // NORMALIZZARE il vettore u

Allora la proiezione ortogonale

di v su u

$$\text{proj}(v, u) = \frac{\|v\|}{\sqrt{\cos(\hat{u}v)}} \cdot \frac{u}{\|u\|} =$$

$$= \frac{\cancel{\|u\|} \langle u, v \rangle}{\|u\| \cancel{\|u\|}} \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

$$= \boxed{\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \cdot u}$$