

Iniziamo con un esempio di ragionamento per assurdo. Cioè, per mostrare che c'è un nesso di causalità (o implicazione logica da  $A$  a  $B$ ) ( $A \Rightarrow B$ ), posso equivalentemente mostrare che se  $B$  è falso allora anche  $A$  è falso.

Esempio:  $\sqrt{2}$  non è razionale (cioè non esistono due numeri interi  $p$  e  $q$  tali che  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ )

Infatti, se così non fosse allora esisterebbero  $p, q$  numeri interi tali che  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

Possiamo supporre che non siano entrambi numeri pari.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  allora, elevando al quadrato

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ cioè } 2q^2 = p^2.$$

Ma allora  $p^2$  è pari.

$$\left( \begin{array}{l} (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{\text{pari}} \\ \Rightarrow \text{il quadrato di un} \\ \text{numero dispari è dispari} \\ (2k)^2 = 4k^2 \text{ pari} \end{array} \right.$$

Ma allora  $p$  è pari, cioè  $p = 2m$   
per un certo  $m$  intero

$$\underline{2q^2} = p^2 = (2m)^2 = \underline{4m^2}$$

Allora  $q^2 = 2m^2$ , cioè  $q^2$  è pari  
e dunque  $q$  è pari.

Ma questo è assurdo perché  
avevamo supposto che non entrassero.

$p$  e  $q$  fossers per.  
Quint  $\sqrt{2}$  NON è razionale.

---

Due parole su funzioni e loro inverse.

Doti due insiem  $A$  e  $B$  una funzione (applicazione, mappa) è un' "assegnazione" di un elemento  $f(a)$  di  $B$  per ogni elemento  $a$  di  $A$ , e si indica con

$$f: A \rightarrow B$$

  
DOMINIO                      CO DOMINIO

$$f(a) \in B \rightsquigarrow a \mapsto f(a)$$

L'immagine di una funzione  $f: A \rightarrow B$  è l'insieme

$$f(A) = \text{Im}(f) = \{ b \in B \mid b = f(a) \text{ per qualche } a \in A \}$$

$f: A \rightarrow B$  si dice

- **SURGETTIVA** se  $f(A) = B$   
**SURGETTIVA**  
 equivalentemente:  $\forall b \in B$   
 $\exists a \in A$  tale che  $f(a) = b$ .

- **INIETTIVA** se  $f(a) = f(a')$   
**INGETTIVA**  
 implica che  $a = a'$

- **BIIETTIVA** se è già suriettiva  
**BIGETTIVA** che iniettiva

Una funzione bigettiva può essere "invertita". Cioè se  $f: A \rightarrow B$  è bigettiva allora posso definire  $g: B \rightarrow A$  tale che se  $f(a) = b$  allora  $g(b) = a$  e viceversa.

D'alti se vale questa proprietà  
indichiamo  $g$  con  $f^{-1}$

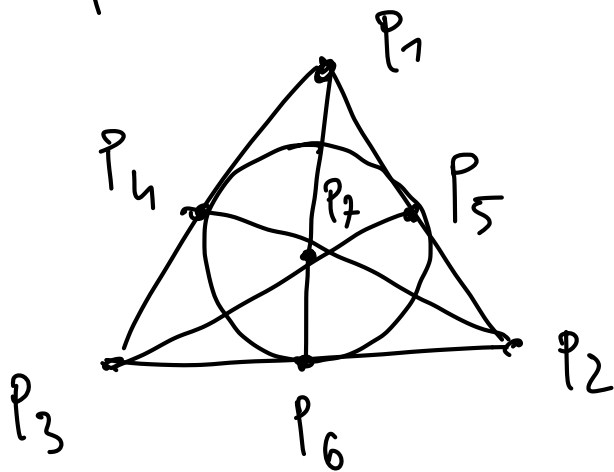
Quasi sempre ci interessereanno  
i casi in cui  $A, B$  o entrambi  
sono interi numeri

---



- punti: elementi della sfera
- rette: equatori

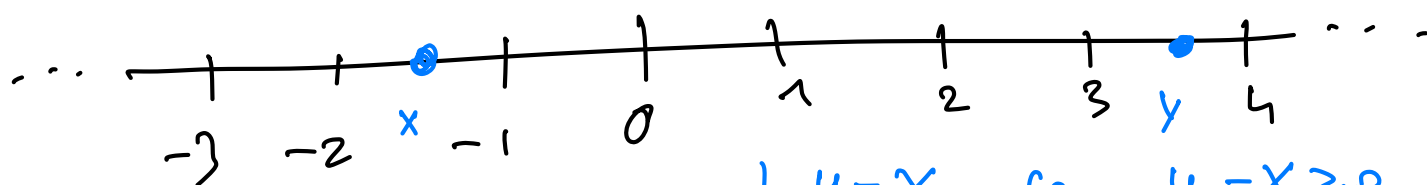
più di Fano (TRIANGOLO EQUILATERO)



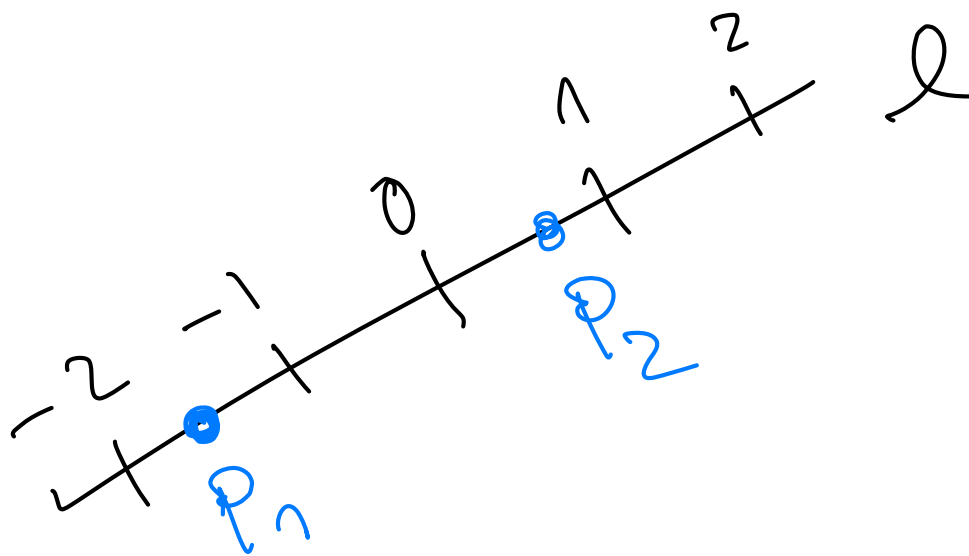
- punti:  $P_1, \dots, P_7$
- rette: tutti i segmenti di segmenti (lati del triangolo e mediane) + la circonferenza inscritta

In ciò che segue, dato un insieme  $A$ , i punti saranno gli elementi di  $A$  e le rette  
 Birkhoff  $\ell$  particolari sottoinsiemi.

(B1) Data una qualsiasi retta  $\ell$ , esiste una bigettione  $f: \ell \rightarrow \mathbb{R}$  che misura le distanze.



$$d(x, y) = |y - x| = \begin{cases} y - x & \text{se } y - x \geq 0 \\ -(y - x) & \text{se } y - x < 0 \end{cases}$$

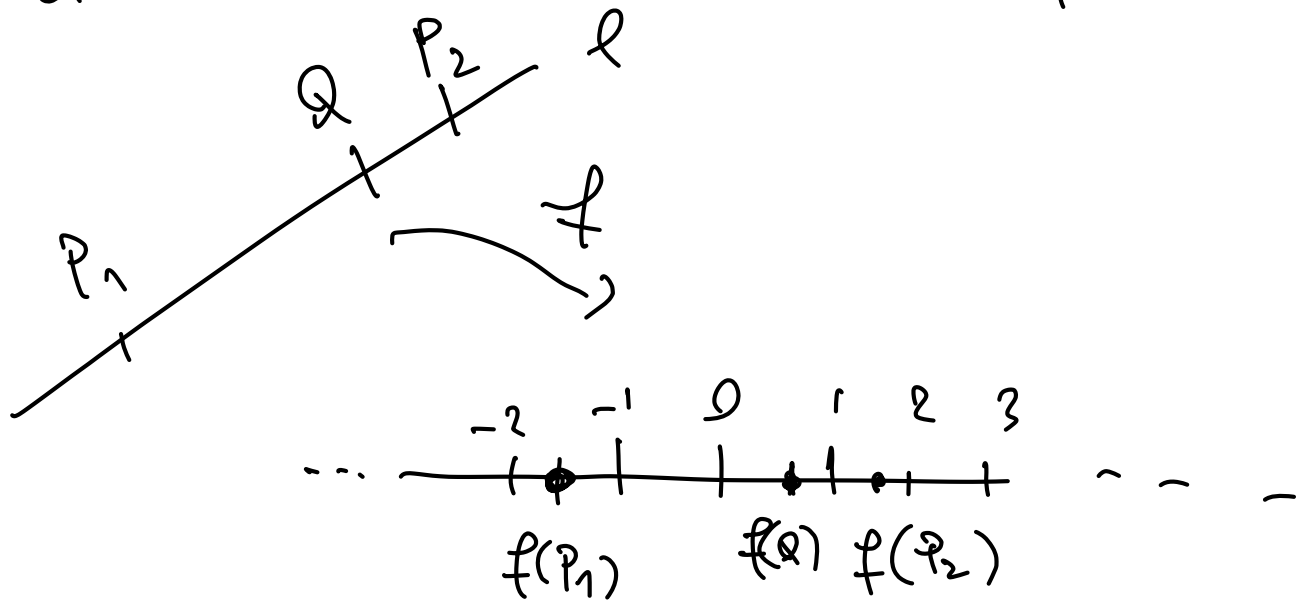


$$d(P_1, P_2) = |f(P_1) - f(P_2)|$$

implicitamente questo postulato ci permette di stabilire se, su una retta, un punto  $P_3$  è compreso fra due punti assegnati  $P_1$  e  $P_2$ .

Infatti, si può definire il segmento  $P_1P_2$  come l'insieme dei punti

$Q$  tali che  $f(P_1) \leq f(Q) \leq f(P_2)$



Posso quindi definire anche le semirette uscenti da un dato punto

$$Q : \begin{cases} \{P \in l \mid f(P) \geq f(Q)\} \\ \{P \in l \mid f(P) \leq f(Q)\} \end{cases}$$

[B2] Esiste esattamente una retta passante per due punti distinti.

In particolare se  $l$  ed  $m$  sono due rette distinte allora

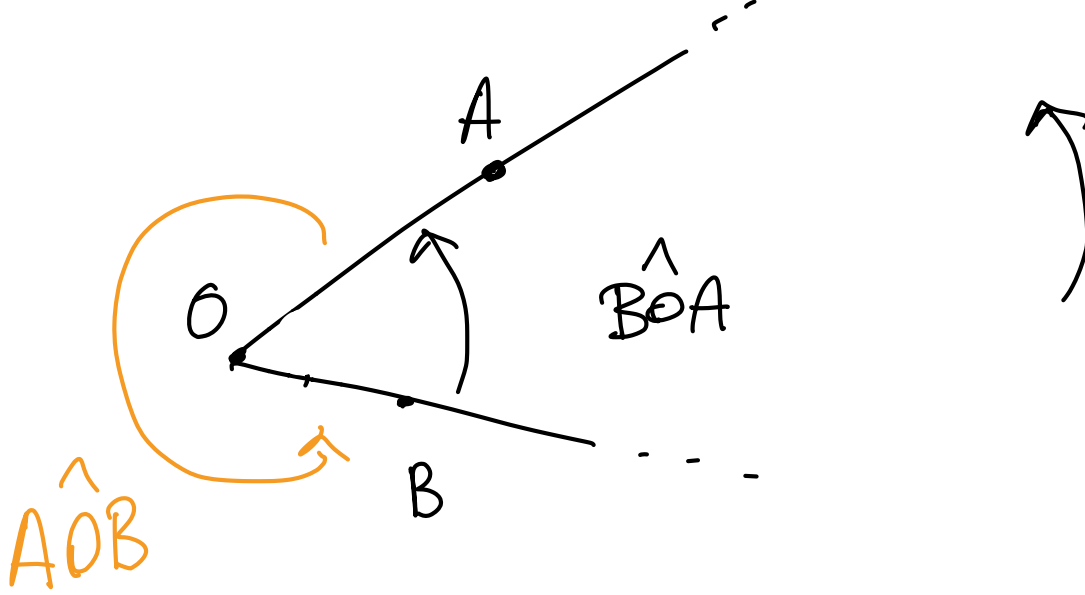
$$l \cap m = \{P\} \text{ oppure } l \cap m = \emptyset$$

Infatti, se  $l \cap m \supset \{P_1, P_2\}$ ,  $P_1 \neq P_2$  allora per [B2]  $l = m$

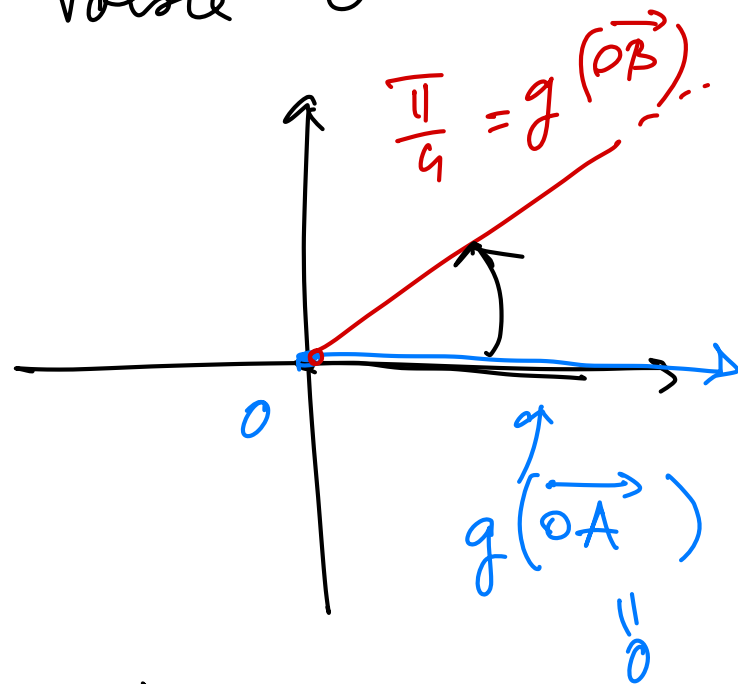
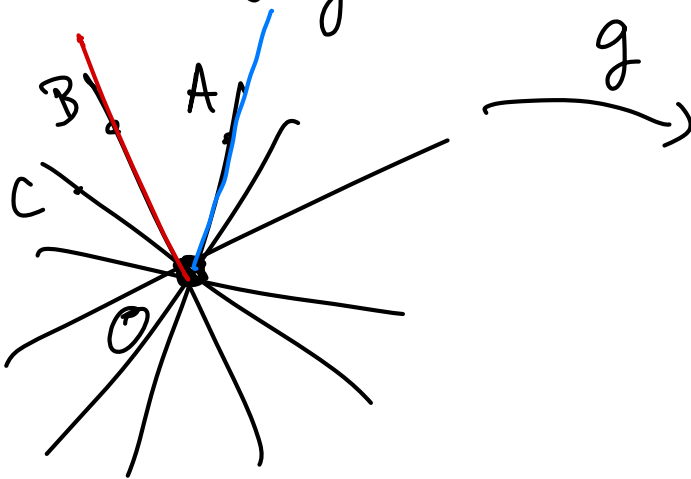
---

[B3] Se  $\mathcal{R}$  è l'insieme delle semirette uscenti da un dato punto, allora esiste una biiezione  $g: \mathcal{R} \rightarrow [0, 2\pi)$  che misura gli angoli in radianti.

Date due semirette uscenti da uno stesso punto  $O$ , queste dividono il piano in due angoli.

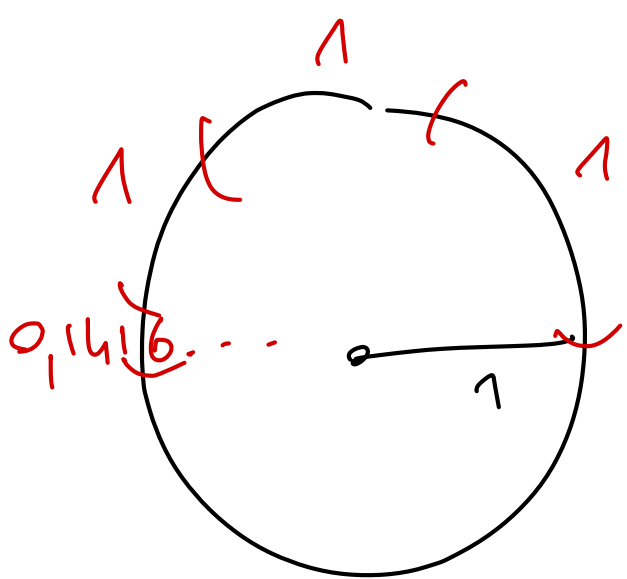


[B3] Dice implicitamente che stiano scegliendo una semiretta particolare a cui assegnano il valore 0



L'altro modo di misurare gli angoli è in gradi:

$$2\pi = 360^\circ$$



$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

ha 24 divisori

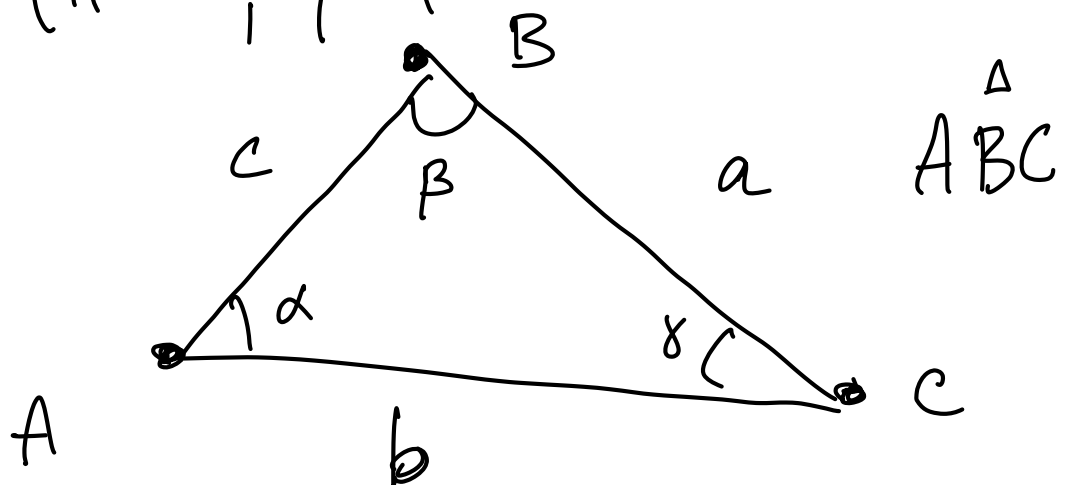
**B4** Se chiamiamo angolo piatto un angolo formato da 2 semirette contenute nella stessa retta, allora tutti gli angoli piatti misurano  $\pi$  radianti.

---

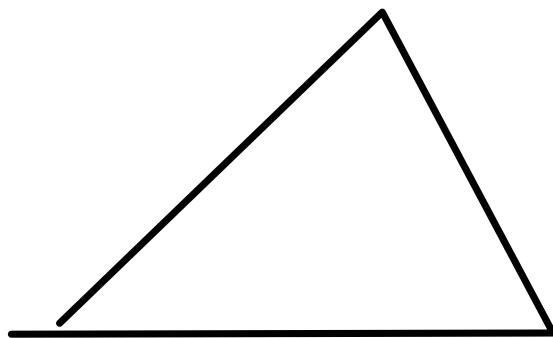
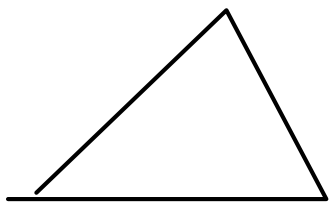
• I postulati B3 e B4 implicano che angoli formati da due rette incidenti sono uguali se opposti al vertice. **[X CASA]**

• Se  $P \in l$  allora esiste un'unica retta  $m$  passante per  $P$  e con un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  radianti rispetto ad  $l$  (Rette perpendicolari / ortogonali).

**Def**: Tre punti  $A, B$  e  $C$  definiscono un triangolo, cioè la parte di piano compreso fra i segmenti  $AB, BC$  e  $CA$ .  
 le misure dei segmenti le indico con  $a(BC)$ ,  $b(CA)$  e  $c(AB)$   
 e indico gli angoli interni con  $\alpha(A)$ ,  $\beta(B)$  e  $\gamma(C)$



**Def** Due triangoli  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  si dicono simili se  
 $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ ,  $\gamma = \gamma'$   
 e esiste un numero  $k$  reale tale  
 che  $a' = ka$ ,  $b' = kb$ ,  $c' = kc$   
 $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$



Se  $k=1$  si dicono CONGRUENTI

**B5**: Due triangoli sono simili se

hanno un angolo uguale/congruente e  
i lati adiacenti a tale angolo  
sono proporzionali rispettivamente  
dello stesso fattore.

$\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$

Se  $\alpha' = \alpha$  e  $b' = kb$  e  $c' = kc$   
allora  $\beta' = \beta$ ,  $\gamma' = \gamma$  e  $a' = ka$ .