Elementi di Matematica - Test di verifica
29 settembre 2023

Quesito 1. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \leq b \implies a^2 \leq b^2$.

(B) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \leq b \;\wedge\; b \geq 0 \implies a^2 \leq b^2$.

(C) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \leq b \;\wedge\; a \geq 0 \implies a^2 \leq b^2$.

(D) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \leq b \;\wedge\; a \leq 0 \implies a^2 \geq b^2$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (C). Infatti, si osservi che $a \leq b \wedge a \geq 0 \implies b \geq 0$ per la proprietà transitiva della relazione $\leq$. Ne segue che

$$a \leq b \wedge a \geq 0 \implies a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies a + b \geq b \wedge b \geq 0 \implies a + b \geq 0.$$

Possiamo quindi concludere che

$$a \leq b \;\wedge\; a \geq 0 \implies b - a \geq 0 \;\wedge\; a + b \geq 0 \implies (b-a)(a+b) \geq 0 \implies b^2 - a^2 \geq 0 \implies a^2 \leq b^2.$$

Tutte le altre risposte sono errate:

- (A) è falsa: ad esempio, se $a = -2$ e $b = 1$ si ha $a \leq b$ ma $a^2 = 4 > b^2 = 1$. Dunque, non è vero che $a^2 \leq b^2$.
- Con lo stesso esempio si prova che (B) è falsa: se $a = -2$ e $b = 1$ si ha $a \leq b \wedge b \geq 0$ ma non è vero che $a^2 \leq b^2$.
- (D) è falsa. Ad esempio si può prendere $a = -1$ e $b = 2$. Allora $a \leq b \wedge a \leq 0$ ma $a^2 = 1 < 2 = b^2$. Dunque non è vero che $a^2 \geq b^2$.
- (E) è falsa perché (C) è vera.

Quesito 2. Si considerino i numeri reali $a = \frac{4}{7}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c = 0,\overline{5}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $a > b$.

(B) $a + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(C) $a < c$.

(D) $b > c$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (D). Notiamo infatti che $c = \frac{5}{9}$. Dato che b e c sono positivi, si ha che

$$b > c \iff b^2 > c^2 \iff \frac{1}{3} > \frac{25}{81} \iff \frac{81}{3} > 25 \iff 27 > 25.$$

Poiché l'ultima disuguaglianza è vera, è vero anche che $b > c$.

Nessuna delle altre risposte è corretta:

- (A) è falsa. Infatti, dato che a e b sono positivi, si ha

$$a > b \Longleftrightarrow a^2 > b^2 \Longleftrightarrow \frac{16}{49} > \frac{1}{3} \Longleftrightarrow 3 \cdot 16 > 49 \Longleftrightarrow 48 > 49.$$

  L'ultima disuguaglianza è falsa, quindi non è vero che $a > b$.

- (B) è falsa. Infatti $a \in \mathbb{Q}$ e $c = \frac{5}{9} \in \mathbb{Q}$, dunque $a + c \in \mathbb{Q}$.

- (C) è falsa. Infatti, dato che $c = \frac{5}{9}$, si ha:

$$a < c \Longleftrightarrow \frac{4}{7} < \frac{5}{9} \Longleftrightarrow 4 \cdot 9 < 7 \cdot 5 \Longleftrightarrow 36 < 35.$$

  L'ultima disuguaglianza è falsa, quindi anche la disuguaglianza $a < c$ è falsa.

- (E) è falsa perché (D) è vera.

Quesito 3. Si consideri il polinomio $p(x) := x^3 - 6x + 4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $p(x)$ non ha radici razionali.

(B) $p(x)$ ha tre radici reali.

(C) $p(x)$ è divisibile per $x - 1$.

(D) Il resto della divisione di $p(x)$ per $x + 1$ è uguale a -1.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (B). Si noti per prima cosa che $p(2) = 8 - 12 + 4 = 0$. Dunque, 2 è una radice di p. Utilizzando la regola di Ruffini per dividere $p(x)$ per $x - 2$ si trova

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Pertanto $p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 2)$. Dato che

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{3},$$

si trova che le radici di $p(x)$ sono $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$. Dunque $p(x)$ ha tre radici reali.

Nessuna delle altre risposte è corretta:

- (A) è falsa perché $p(2) = 0$ quindi 2 è una radice razionale di $p(x)$.

- (C) è falsa. Infatti, poiché $p(1) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0$, $p(x)$ non è divisibile per $x - 1$.

- (D) è falsa. Infatti, per il teorema del resto, il resto della divisione di $p(x)$ per $x + 1$ è $p(-1) = -1 + 6 + 4 = 9$.

- (E) è falsa perché (B) è vera.

Quesito 4. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2 - 1}{2x - 1} \leq 4x + 1$ è:

(A) $\left[\,0, \frac{2}{7}\,\right] \;\cup\; \left]\,\frac{1}{2}\,, +\infty\,\right[$.

(B) $\left]-\infty, 0\,\right] \;\cup\; \left]\,\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\,\right[\;\cup\; \left]\,\frac{1}{2}, +\infty\,\right[$.

(C) $\left]-\infty, 0\,\right] \;\cup\; \left]\,\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\,\right[$.

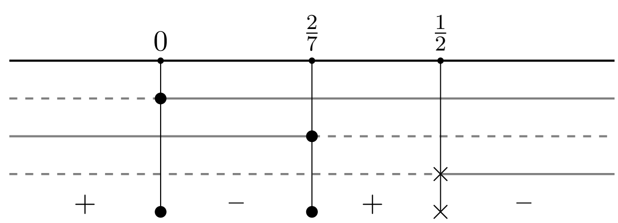
(D) $\left[\,0, \frac{2}{7}\,\right]$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione. La risposta corretta è (A). Per dimostrarlo, risolviamo la disequazione:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{2x-1} \leq 4x+1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{2x-1} - (4x+1) \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-1-(4x+1)(2x-1)}{2x-1} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-1-(8x^2-4x+2x-1)}{2x-1} \leq 0 \\
&\Longleftarrow \quad \frac{-7x^2+2x}{2x-1} \leq 0 \\
&\Longleftarrow \quad \frac{x(2-7x)}{2x-1} \leq 0
\end{aligned}$$

Possiamo rappresentare graficamente il segno della frazione $\frac{x(2-7x)}{2x-1}$ come segue:



Ne segue che

$$\frac{x(2-7x)}{2x-1} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{7} \quad \vee \quad x > \frac{1}{2}.$$

Pertanto, l'insieme delle soluzioni è $\left[\,0\,, \frac{2}{7}\,\right] \cup \left]\,\frac{1}{2}\,, +\infty\,\right[$.

Quesito 5. Sia S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|x^2-1| = 2x-1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) S è un insieme di 4 elementi.

(B) $S = \{2\}$.

(C) S contiene due numeri irrazionali.

(D) $S \cap (\mathbb{R} \setminus Q) = \big\{ -1 + \sqrt{3} \,\big\}$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (D). Per dimostrarlo determiniamo l'insieme S.

$$\begin{aligned}
|x^2-1| = 2x-1 \iff & \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 = 2x-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ -x^2+1 = 2x-1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -1 \\ x^2-2x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2+2x-2 = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -1 \\ x = 0 \vee x = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x = -1+\sqrt{3} \ \vee \ x = -1-\sqrt{3}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si noti che $x = 0$ non soddisfa la condizione $x \geq 1 \vee x \leq -1$. Analogamente, $x = -1-\sqrt{3}$ non soddisfa la condizione $-1 < x < 1$. Pertanto:

$$|x^2-1| = 2x-1 \quad \iff \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -1+\sqrt{3}.$$

Dunque $S = \{2, -1+\sqrt{3}\}$. In particolare, $S \cap (\mathbb{R} \setminus Q) = \{-1+\sqrt{3}\}$.

Le altre risposte sono false:

- (A) è falsa perché S ha due elementi.
- (B) è falsa perché $S = \{2, -1+\sqrt{3}\}$.
- (C) è falsa perché l'unico numero irrazionale in S è $-1+\sqrt{3}$.
- (E) è falsa perché (D) è vera.

Quesito 6. Quale dei seguenti numeri reali è uguale a $\log_5(5^5 - 5^3)$?

(A) 2.

(B) $\frac{5}{3}$.

(C) $3 + \log_5 24$.

(D) $3 \log_5 24$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (C). Infatti:

$$\log_5(5^5 - 5^3) = \log_5(5^3(5^2-1)) = \log_5 5^3 + \log_5(5^2-1) = 3 + \log_5(24).$$

Le altre risposte sono false:

- (A) è falsa perché $5^2 = 25 \neq 5^5 - 5^3$.
- (B) è falsa perché $5^{\frac{5}{3}} < 5^3 < 5^3(5^2-1) = 5^5 - 5^3$.
- (D) è falsa perché $3\log_5 24 = \log_5 24^3$ e $24^3 > 5^3(\frac{24}{5})^3 > 5^3 \cdot 4^3 > 5^3 \cdot 24 = 5^5 - 5^3$.
- (E) è falsa perché (C) è vera.

Quesito 7. Nel piano cartesiano, si considerino la retta r di equazione $4x + 3y - 2 = 0$ e il punto P di coordinate $(2, -3)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $P \in r$ e r è parallela alla retta di equazione $\frac{3}{2}x + 2y = 1$.

(B) $P \notin r$ e r è parallela alla retta di equazione $2x + \frac{3}{2}y = 0$.

(C) $P \in r$ e r è perpendicolare alla retta di equazione $\frac{3}{2}x - 2y = 12$.

(D) $P \notin r$ e r è perpendicolare alla retta di equazione $2x - \frac{3}{2}y = 1$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzione: La risposta corretta è (B). Notiamo che sostituendo le coordinate di p nell'equazione di r si ottiene $8 - 9 - 2 = 0$ che è falso. Quindi $P \notin r$. Inoltre, la retta r e la retta di equazione $2x + \frac{3}{2}y = 0$, sono descritte rispettivamente dalle equazioni in forma esplicita: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{4}{3}x$. Dato che le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, sono parallele.
Le altre risposte non sono corrette.

- (A) e (C) sono false perché $P \notin r$.
- (D) è falsa perché r e la retta $2x - \frac{3}{2}y = 1$ non sono perpendicolari. Infatti, le loro equazioni possono essere scritte in forma esplicita come $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ e $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ e coefficienti angolari delle due rette non sono antireciproci.
- (E) è falsa perché (B) è vera.

Quesito 8. Sia $\mathcal{C}$ la conica descritta dall'equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + 2y - 3 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $\mathcal{C}$ è un'ellisse di centro $(0, -1)$ e semiassi di lunghezza 2 e 1.

(B) $\mathcal{C}$ è una circonferenza di centro $(0, -1)$.

(C) $\mathcal{C}$ è una parabola passante per il punto $(0, 1)$.

(D) $\mathcal{C}$ è un'ellisse e il suo centro coincide con il vertice della parabola di equazione $y = 3x^2 - 1$.

(E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Soluzioni: La risposta corretta è (D). Infatti, l'equazione può essere riscritta come

$$\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Dall'ultima espressione segue che $\mathcal{C}$ è un'ellisse di centro $(0, -1)$ e semiassi di lunghezza 4 e 2. Si noti inoltre che $(0, -1)$ è anche il vertice della parabola $y = 3x^2 - 1$.

Le affermazioni nelle altre risposte sono false:

- (A) è falsa perché i semiassi di $\mathcal{C}$ hanno lunghezza rispettivamente 4 e 2.
- (B) è falsa perché i coefficienti di x^2 e y^2 nell'equazione di $\mathcal{C}$ sono diversi. Dunque $\mathcal{C}$ non è una circonferenza.
- (C) è falsa perché i coefficienti di x^2 e y^2 nell'equazione di $\mathcal{C}$ sono entrambi diversi da 0. Dunque $\mathcal{C}$ non è una parabola.
- (E) è falsa perché (D) è vera.