

Elementi di Matematico

Esercizi (Lezioni 5-7)

Esercizio 1. Determinare l'unica risposta esatta alle seguenti domande a risposta multipla:

1. Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ ha 3 radici reali distinte
 - (B) $p(x)$ ha 2 radici reali distinte
 - (C) $p(x)$ ha un'unica radice reale
 - (D) $p(x)$ non ha radici reali
 - (E) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.
2. Si consideri il polinomio $p(x) = x^5 + 3x^2 + x + 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ non ha radici razionali
 - (B) $p(x)$ è divisibile per $x + 2$
 - (C) $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$
 - (D) $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 - (E) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta
3. Quante radici reali ha il polinomio $x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$?
 - (A) tre
 - (B) due
 - (C) una
 - (D) nessuna
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
4. Si considerino i polinomi $a(x) = x^5 + x^4 + 1$ e $b(x) = x^2 + x + 1$. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) Il polinomio prodotto $a(x)b(x)$ non ha radici reali
 - (B) Il polinomio $a(x) + b(x)$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$
 - (C) $a(x)|b(x)$
 - (D) $b(x)|a(x)$
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta
5. Si consideri il polinomio $p(x) = 10x^5 - 7x^3 + x$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - (A) $p(x)$ può essere scritto come prodotto di 3 polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$
 - (B) $p(x)$ ha esattamente tre radici reali
 - (C) $p(x)$ ha un'unica radice reale
 - (D) $p(x)$ non ha radici irrazionali
 - (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

6. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri il polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + a^2$. Quanti sono i valori di a per cui $p(x)$ ha un'unica radice razionale?

- (A) nessuno
- (B) uno
- (C) due
- (D) infiniti
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

7. L'equazione $3x^4 + x^2 - 2 = 0$ ha:

- (A) una soluzione
- (B) due soluzioni
- (C) tre soluzioni
- (D) quattro soluzioni
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

8. L'equazione $\frac{x}{x+1} + \frac{4}{3x} = \frac{2x}{1-x^2}$:

- (A) ha tre soluzioni reali
- (B) ha due soluzioni reali
- (C) ha una soluzione reale
- (D) non ha soluzioni reali
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

9. Si consideri l'equazione

$$\frac{11x^2}{x-1} + \frac{2+11x-19x^3}{2x^2-x-1} = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (A) L'equazione ha una soluzione razionale e due soluzioni irrazionali
- (B) L'equazione ha una soluzione irrazionale e due soluzioni razionali
- (C) L'equazione ha tre soluzioni razionali
- (D) L'equazione ha tre soluzioni irrazionali
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

10. L'insieme delle soluzioni reali della disequazione $\frac{1}{3x^2-1} \geq 2$ è:

- (A) $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[\cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$
- (B) $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$
- (C) $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$
- (D) $] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

11. La disequazione $x \geq \frac{30}{x-1}$ è risolta da ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che:

- (A) $x \leq -5 \vee x \geq 6$
- (B) $-5 \leq x \leq 6$
- (C) $x \leq -5 \vee 1 < x \leq 6$
- (D) $-5 \leq x < 1 \vee x \geq 6$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti

12. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2-2}{3-x} \leq x$ è:

- (A) $[-\frac{1}{2}, 2] \cup]3, +\infty[$
- (B) $[-\frac{1}{2}, 2]$
- (C) $] -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 3[$
- (D) $] -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

13. La disequazione $\frac{3x-7-4x^2}{3x-1} \geq 0$ è risolta da ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che:

- (A) $x < \frac{1}{3}$
- (B) $x > \frac{1}{3}$
- (C) $x \leq -\frac{7}{4} \vee \frac{1}{3} < x \leq 1$
- (D) $-\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

14. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x(3x^2+x-1)^2}{(x+1)^4} \leq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $S \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- (B) S è unione di due intervalli disgiunti
- (C) S è un intervallo
- (D) $S \cap \mathbb{Q}$ non contiene numeri positivi
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

15. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x+2}{x} > x+1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $S = \emptyset$
- (B) S è un intervallo non vuoto
- (C) S è unione di due intervalli aperti disgiunti
- (D) S è unione di tre intervalli aperti disgiunti
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

16. L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^5 + 5x^3 \leq 6x$ è:

- (A) $[-1, 1]$
- (B) $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

- (C) $] -\infty, -1] \cup [0, 1]$
- (D) $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

17. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x| = y \iff x = y \vee x = -y$
- (B) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x| = |y| \iff x = y \vee x = -y$
- (C) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x| \leq y \iff x \leq y \vee x \geq -y$
- (D) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x| \geq y \iff x \geq y \wedge x \leq -y$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti

18. L'equazione $|2x - 1| = x - 1$:

- (A) non ha soluzioni
- (B) ha un'unica soluzione
- (C) ha due soluzioni
- (D) ha tre soluzioni
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

19. L'equazione $|6x^2 - 5x + 1| = 3x - 1$ ha

- (A) 3 soluzioni reali
- (B) 2 soluzioni reali
- (C) Una soluzione reale
- (D) Nessuna soluzione reale
- (E) Nessuna delle risposte precedenti

20. Quante sono le soluzioni razionali dell'equazione $\frac{6-|x^3-x^2|}{x^3+x^2} = 1$?

- (A) tre
- (B) due
- (C) una
- (D) nessuna
- (E) Nessuna delle risposte precedenti

21. La disequazione $\frac{3-|2x-1|}{x^2-3} \leq 0$ è risolta da tutti i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ tali che:

- (A) $x < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x \leq 2$
- (B) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \vee x > 2$
- (C) $-\sqrt{3} < x \leq -1 \vee \sqrt{3} < x \leq 2$
- (D) $x < -\sqrt{3} \vee -1 \leq x \leq 2$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti.

22. L'insieme delle soluzioni della disequazione $(3x + 1)^4 \leq (x^2 + x - 1)^2$ è:

- (A) \emptyset
- (B) \mathbb{R}
- (C) $[-\frac{7}{10}, 0]$
- (D) $] -\infty, -\frac{7}{10}] \cup [0, +\infty[$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti

23. Siano $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{y^3} \iff y \leq x$
- (B) $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{y^3} \iff 0 \leq y \leq x$
- (C) $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{y^3} \iff 0 < y \leq x \vee x \leq y < 0$
- (D) $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{y^3} \iff 0 < x \leq y \vee y \leq x < 0$
- (E) nessuna delle risposte precedenti.

24. Si consideri il polinomio $p(x) := 2x^3 + x^2 + x - 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $p(x)$ non ha radici razionali.
- (B) $p(x)$ è divisibile per $x - 3$.
- (C) $p(x)$ è divisibile per $2x - 1$.
- (D) Il resto della divisione di $p(x)$ per $x + 2$ è 21.
- (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

25. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{3-x^2}{x} \leq 3x + 1$ è:

- (A) $[-1, 0[\cup [\frac{3}{4}, +\infty[$.
- (B) $] -\infty, -1] \cup]0, \frac{3}{4}]$.
- (C) $[-1, \frac{3}{4}] \setminus \{0\}$.
- (D) $] -\infty, -1] \cup [\frac{3}{4}, +\infty[$.
- (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

26. Sia S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|2x + 1| = x^2 - 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) S è un insieme di 4 elementi.
- (B) $S \cap \mathbb{Q} = \{-2\}$.
- (C) S contiene due numeri irrazionali.
- (D) S non contiene numeri positivi.
- (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

Esercizio 2. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili e determinarne le radici reali:

(a) $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6$

- (b) $x^4 - 8x^2 + 15$
- (c) $2x^4 + x^2 - 1$
- (d) $-x^5 + 2x^3 + 8x$
- (e) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$
- (f) $6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 9x + 2$

Esercizio 3. Dimostrare che il polinomio $\sqrt{3}x^3 + x + \sqrt{2}$ non ha radici razionali.

Esercizio 4. Determinare il valore di a per cui il polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 - 2x + 2a$ sia divisibile per $x - 3$.

Esercizio 5. Fattorizzare il seguente polinomio sapendo che $x^2 + x + 1$ è uno dei suoi divisori:

$$x^6 - x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 10x - 6$$

Esercizio 6. Determinare il numero di radici (distinte) del seguente polinomio al variare di $m \in \mathbb{Z}$:

$$x^3 + m^2x^2 - m^2x - m^4$$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti equazioni :

- (a) $\frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} = 2$
- (b) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$
- (c) $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{3}{x - 2} - 2$
- (d) $\frac{x - 1}{x} + \frac{4}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$
- (e) $|3x + 1| = x^2 + 3x$
- (f) $\frac{|x^2 - 3|}{x} = 5x - 3$
- (g) $\frac{1}{|x - 2|} + \frac{1}{x(x - 2)} = \frac{1}{2}$
- (h) $|3 - |x|| + 2x = 0$
- (i) $(x + 2)^6 = (2x - 1)^6$

Esercizio 8. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$(a) \frac{x^2 + 2x}{3} + \frac{5x}{12} > \frac{3x + 1}{4}$$

$$(b) x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0$$

$$(c) x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$$

$$(d) \frac{3x^2 + 2x - 6}{3 - 2x - x^2} \geq -2$$

$$(e) \frac{1}{x} \leq \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

$$(f) \frac{1 + x + x^2 - 3x^3}{14 + 5x - x^2} \geq 0$$

$$(g) \frac{x^2(x-1)}{2} - \frac{x}{6} \leq \frac{x(x^2-4)}{3}$$

$$(h) \frac{x+1}{x+2} \geq \frac{3x+1}{x^2+2x}$$

$$(i) |x-2| + x^2 < 2$$

$$(j) |x^2 - 2| \geq x$$

$$(k) \frac{1 - |2x - 3|}{x - 9} \geq 0$$

$$(l) \frac{|4x^2 - x|}{1 - x} \leq 3x$$

Esercizio 9. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$(1) \begin{cases} 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \geq 1 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

Esercizio 10. Determinare, in funzione del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$(1) \frac{ax + 2}{4} - \frac{x - 1}{2} < 2 \quad (2) (x - a)(x^2 - 1) \leq 0$$

Risposte esercizio 1

1. B
2. A
3. C
4. D
5. E
6. C
7. B
8. B
9. A
10. B
11. D
12. A
13. A
14. D
15. C
16. C
17. B
18. A
19. B
20. D
21. E
22. C
23. E
24. C
25. A
26. B

Risultati esercizio 2

(a) $4x^3 - 2x^2 - 12x + 6 = 2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2x - 1)$. Radici: $\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(b) $x^4 - 8x^2 + 15 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Radici: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

(c) $2x^4 + x^2 - 1 = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)$. Radici: $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $-x^5 + 2x^3 + 8x = -x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2)$ Radici: $0, 2, -2$.

(e) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)^2$ Radici: -1 .

(f) $6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 9x + 2 = (2x + 1)(3x + 2)(x^2 + x + 1)$, Radici: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$.

Soluzione esercizio 3

Sia $p(x) = \sqrt{3}x^3 + x + \sqrt{2}$. Supponiamo per assurdo che esista $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $p(q) = 0$. Si noti che $q \neq 0$ perché $p(0) \neq 0$. La condizione $p(q) = 0$ implica:

$$\sqrt{3}q^3 = -q - \sqrt{2}.$$

Elevando al quadrato, otteniamo

$$3q^6 = q^2 + 2\sqrt{2}q + 2,$$

da cui si deduce che

$$\sqrt{2} = \frac{3q^6 - q^2 - 2}{2q} \in \mathbb{Q},$$

il che è assurdo.

Risultato esercizio 4

$$a = 3.$$

Risultato esercizio 5

$$(x - 3)(x + 1)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$

Risultato esercizio 6

$$m \notin \{0, \pm 1\} \Rightarrow 3 \text{ radici;}$$

$$m = \pm 1 \Rightarrow 2 \text{ radici;}$$

$$m = 0 \Rightarrow 1 \text{ radice;}$$

Risultati esercizio 7

(a) $x = -1 \vee x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

(b) $x = 1 \vee x = -1$

(c) $x = -\frac{4}{3} \vee x = 3$

(d) $x = -2$

(e) $x = 1 \vee x = -3 - 2\sqrt{2}$

(f) $x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

(g) $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = 2 + \sqrt{6}$

(h) $x = -1$

(i) $x = -\frac{1}{3} \vee x = 3$

Risultati esercizio 8

(a) $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

(b) $\{1, -1\}$

(c) $] - 2, 1[\cup] 2, +\infty[$

(d) $] - 3, 0] \cup] 1, 2]$

(e) $] - 2, 0[\cup] 1, 2]$

(f) $] - 2, 1] \cup] 7, +\infty[$

(g) $] - \infty, 0]$

(h) $] - \infty, -2[\cup] 1 - \sqrt{2}, 0[\cup] 1 + \sqrt{2}, \infty[$

(i) $] 0, 1[$

(j) $] - \infty, 1] \cup] 2, +\infty[$

(k) $] - \infty, 1] \cup] 2, 9[$

(l) $[0, \frac{4}{7}] \cup] 1, +\infty[$

Risultati esercizio 9

1. Nessuna soluzione

2. $x \in [-2, -1] \cup \{3\}$,

3. $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[$

Risultati esercizio 10

$$(1) \begin{cases} \text{Se } a = 2, & x \in \mathbb{R}, \\ \text{Se } a > 2, & x \in \left] -\infty, \frac{4}{a-2} \right[, \\ \text{Se } a < 2, & x \in \left] \frac{4}{a-2}, +\infty \right[. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \text{Se } a < -1, & x \in] - \infty, a] \cup [-1, 1], \\ \text{Se } a = -1, & x \in] - \infty, 1] \\ \text{Se } -1 < a < 1, & x \in] - \infty, -1] \cup [a, 1], \\ \text{Se } a = 1, & x \in] - \infty, -1] \cup \{1\} \\ \text{Se } a > 1, & x \in] - \infty, -1] \cup [1, a]. \end{cases}$$