

# Elementi di Matematica

## Esercizi (Lezioni 1-4)

**Esercizio 1.** Determinare l'unica risposta esatta alle seguenti domande a risposta multipla:

1. Sia  $a$  un numero reale,  $a < 1$ . Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- (A)  $a^2 < 1$
- (B)  $a^3 < 1$
- (C)  $a^2 < a$
- (D)  $|a| < 1$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (A)  $a \leq b \implies ac \leq bc$
- (B)  $a \leq b \wedge c \geq 0 \implies a^2c \leq b^2c$
- (C)  $a < b \wedge c \neq 0 \implies ac < bc$
- (D)  $a < b \wedge c \neq 0 \implies \frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

3. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- (A)  $\sqrt{a^4b^4} = a^2b^2$
- (B)  $\sqrt{a^2b^2} = ab$
- (C)  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$
- (D)  $\sqrt{a^2 + b^2} > a$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

4. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Quale delle seguenti equivalenze è sicuramente corretta?

- (A)  $|a| = b \iff a = b \vee b = -a$
- (B)  $|a| = |b| \iff a = b \vee b = -a$
- (C)  $a^2 \geq b^2 \iff a \geq b$
- (D)  $a^2 > b^2 \iff a > b$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

5. Quale delle seguenti affermazioni è soddisfatta da ogni coppia di numeri reali  $a, b$ ?

- (A)  $(a + b)^3 \leq a^3 + b^3$
- (B)  $(a + b)^3 \geq a^3 + b^3$
- (C)  $a((a + b)^3 - b^3) \geq 0$
- (D)  $b((a + b)^3 - b^3) \geq 0$

(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

6. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge c \neq 0 \implies ac \leq bc.$
- (B)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge c \geq 0 \implies a^2c \leq b^2c.$
- (C)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge c \leq 0 \implies a + c \leq b.$
- (D)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \wedge c \leq 0 \implies a \leq b + c.$
- (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

7. Si considerino i numeri reali  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $c = 0, \bar{4}$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $a > b.$
- (B)  $a - c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$
- (C)  $a \geq c.$
- (D)  $b < c.$
- (E) Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

8. L'allineamento decimale di  $\frac{7}{11}$  è:

- (A) 11,7
- (B) 7,11
- (C)  $0,6\bar{3}$
- (D)  $0,\bar{63}$
- (E) Nessuno dei precedenti

9. L'allineamento decimale di  $\frac{21}{50}$  è:

- (A) infinito e non periodico
- (B) infinito e periodico semplice
- (C) infinito e periodico misto
- (D) finito
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

10. Si consideri il numero reale  $\alpha = -3,14\overline{56}$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $\alpha > -3$
- (B)  $\alpha \in \mathbb{Z}$
- (C)  $\frac{\alpha}{2} \in \mathbb{Q}$
- (D)  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

11. Si considerino i numeri reali:

$$a = \frac{3}{7} \quad b = \frac{15}{32} \quad c = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $a < b < c$
- (B)  $b < a < c$
- (C)  $a < c < b$
- (D)  $c < a < b$ .
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

12. Si considerino i numeri reali  $a := \frac{1}{5\sqrt{2}}$ ,  $b := 0,1\bar{3}$ ,  $c := \frac{1}{7}$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $a < b < c$
- (B)  $b < a < c$
- (C)  $c < a < b$
- (D)  $a < c < b$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

13. Si considerino i numeri reali:

$$a = \frac{\sqrt{15}}{3} \quad b = 1,2 \quad c = \sqrt{ab}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $a < b < c$
- (B)  $b < a < c$
- (C)  $a < c < b$
- (D)  $b < c < a$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

14. Si considerino i numeri reali:

$$a = 1 - \sqrt{2} \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $c < a < b$
- (B)  $a < b < c$
- (C)  $b < a < c$
- (D)  $a < c < b$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

15. Si consideri il numero reale  $x := \sqrt{\frac{21}{4} + 3\sqrt{3}}$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A)  $x - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
- (B)  $x^4 \in \mathbb{Q}$
- (C)  $x^2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
- (D)  $x^2 > 9x$
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

16. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ :

$$A := \left\{ \sqrt[6]{2}, 0, 11\bar{3}, -15, 0 \right\} \quad B := \left\{ 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}, 0, 11\bar{3}, 3\pi \right\}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (A)  $A \subseteq \mathbb{Q}$
- (B)  $A \cap B = \left\{ \frac{17}{150} \right\}$
- (C)  $B \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- (D)  $A \cup B$  ha 6 elementi
- (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

**Esercizio 2.** Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false fornendone una dimostrazione o un controesempio.

- Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora:  $x \geq y \iff x^2 \geq y^2$ .
- Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Allora:  $x \geq y \iff x^2 \geq y^2$ .
- Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora:  $x \geq y \iff x^3 \geq y^3$ .

**Esercizio 3.** Sia  $(A, \bar{n}, \sigma)$  una terna che soddisfa gli assiomi di Peano, ovvero:

- $A$  è un insieme
- $\bar{n} \in A$
- $\sigma : A \rightarrow A$  è una funzione che soddisfa:
  1.  $\sigma$  è iniettiva
  2.  $\bar{n} \notin \sigma(A)$
  3.  $\forall S \subseteq A: \bar{n} \in S \wedge \sigma(S) \subseteq S \implies S = A$ .

Dimostrare che  $\sigma(A) = A \setminus \{\bar{n}\}$

## Risposte Esercizio 1

1. B
2. D
3. A
4. B
5. C
6. C
7. D
8. D
9. D
10. C
11. D
12. B
13. D
14. A
15. A
16. C