ELEMENTI DI MATEMATICA - LEZIONE 9

lunedì 25 settembre 2023 09:41

LOGARITMI

Siano $a, y \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, consideriamo l'equazione

$$a^x = y$$

- Se $a = 1$ è risolubile $\iff y = 1$
- Se $a \neq 1$ e $y \leq 0$ non ci sono soluzioni
- Se $a \neq 1$ e $y > 0$ esiste un'unica soluzione.

(che chiamiamo logaritmo in base a di y)

Def: Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Si definisce LOGARITMO IN BASE a di y l'unica soluzione di $a^x = y$ (cioè l'unico esponenente a cui elevare a per ottenere y)
Il logaritmo in base a di y si indica con $\log_a y$)

Ricordare: Siano $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$.
Allora:

$$x = \log_a y \iff a^x = y$$

ESEMPI

- $\log_2 32 = 5 \qquad (2^5 = 32)$
- $\log_3 81 = 4 \qquad (3^4 = 81)$
- $\log_{10} 1000000 = 6 \qquad (1000000 = 10^6)$
- $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \qquad \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16 \right)$

Notazioni particolari

- Se $a = e$ (Numero di Nepero) allora $\log_e x$ si indica anche con $\ln x$ (LOGARITMO NATURALE) oppure con $\log x$

• Se $a = 10$, $\log_{10} x$ si indica anche con $\text{Log}\, x$ (L maiuscola).

$\log 10 = \log_e 10 = \ln 10$ mentre
$\text{Log}\, 10 = = \log_{10} 10 = 1$

In particolare quando si risolvono equazioni e disequazioni con logaritmi bisogna richiedere che l'argomento dei logaritmi sia positivo

PROPRIETÀ Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

0) $\log_a x$ è definito solo se $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x > 0}$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $a^{\log_a x} = x$.

3) $\log_a 1 = 0$ $\quad a^0 = 1$
e $\log_a a = 1$ $\quad a^1 = a$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

7) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $\log_a x^y = y \log_a x$

8) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

9) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $x \neq 1$: $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

(Infatti se $l = \log_a x$: $a^l = x \iff a = x^{\frac{1}{l}}$)

10) Siano $b, x \in \mathbb{R}$ con $b, x > 0$, $b \neq 1$. Allora:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Attenzione: Nella proprietà 4:

$\log_a x^4 = \log_a (x^4)$

da non confondere con $(\log_a x)^4 = \log_a^4 x$

È molto importante conoscere bene le proprietà dei logaritmi e saperle utilizzare per semplificare espressioni.

ESEMPIO

- $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{\frac{1}{3}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}} = -\log_3 3^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}$

- $\log_4(40) = \log_4(2^3 \cdot 5) = \log_4(4^{\frac{3}{2}} \cdot 5)$
  $= \log_4(4^{\frac{3}{2}}) + \log_4 5 = \frac{3}{2} + \log_4 5$

OSS Se $x > 0$: $\log(x^2) = 2\log x$

Più in generale, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\log(x^2) = \log(|x|^2) = 2\log|x|$

ESEMPIO

- $2^{\log_2 a^{\log_a 4}} = 2^{\log_2(a^{\log_a 4})} = a^{\log_a 4} = 4$

- $2^{\log_a 4^{\log_2 a}} = 2^{\log_a(4^{\log_2 a})} = 2^{\log_2 a \cdot \log_a 4}$
  $= (2^{\log_2 a})^{\log_a 4} = a^{\log_a 4} = 4.$

OSS Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$:

$$x = y \iff a^{\log_a x} = a^{\log_a y} \iff \log_a x = \log_a y.$$

Si può fare il logaritmo di entrambi i membri di un'equazione (perché entrambi positivi) ottenendo un'equazione equivalente.

- In modo simile: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$x = y \iff \log_a a^x = \log_a a^y \iff a^x = a^y$$

L'equazione $x = y$ è equivalente a: $a^x = a^y$)

Ricordare: Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Siano $x, y \in \mathbb{R}$.
Allora:

1) Se $x, y > 0$: $x = y \iff \log_a x = \log_a y$
2) $x = y \iff a^x = a^y$.

Equazioni con esponenziali e logaritmi.

ESEMPIO

$$2 \cdot 3^x = 16$$
$$3^x = 8 \qquad (\log_3 3^x = \log_3 8 \iff x = \log_3 8)$$
$$x = \log_3 8 \quad (= 3 \log_3 2)$$

ESEMPIO

$$5^x + 3 = 0 \qquad \text{Non ci sono soluzioni.}$$
$$5^x = -3 \qquad (\text{perché } 5^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$$

ESEMPIO

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

Sostituzione : $t = e^x$

$t^2 + t - 2 = 0$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$t = 1 \quad \vee \quad t = -2$

$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = -2$

$x = \log 1$ (impossibile)

$x = 0$

Quindi $x = 0$
è l'unica soluzione

Nota. Per la definizione di logaritmo
$e^x = 1 \iff x = \log 1 \iff x = 0$
Si può vedere questo passaggio in altri modi equivalenti:

$e^x = 1$	$e^x = 1$
$\log e^x = \log 1$	$e^x = e^0$
$x = 0$	$x = 0$

ESEMPIO

$5^{x+1} = \frac{1}{2} 6^{3x}$

$2 \cdot 5^{x+1} = 6^{3x}$

$\log_5 (2 \cdot 5^{x+1}) = \log_5 6^{3x}$

$\log_5 2 + \log_5 5^{x+1} = 3x \cdot \log_5 6$

$\log_5 2 + x+1 = 3x \log_5 6$

$$x - 3x\log_5 6 = -1 - \log_5 2$$

$$x(1 - 3\log_5 6) = -1 - \log_5 2$$

$$x = \frac{-1-\log_5 2}{1-3\log_5 6} = \frac{1+\log_5 2}{3\log_5 6 - 1}$$

Metodo alternativo

$$5^x = \frac{1}{2}\,6^{3x}$$

$$\frac{5^x}{6^{3x}} = \frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{5}{6^3}\right)^x = \frac{1}{10}$$

$$x = \log_{\frac{5}{6^3}} \frac{1}{10}$$

ESEMPIO

$$4\log_4 x + 5 = 0$$

- c.e.: $x > 0$
- $4\log_4 x + 5 = 0$

$$\log_4 x = -\frac{5}{4}$$

$$x = 4^{-\frac{5}{4}}$$

$$4^{\log_4 x} = 4^{-\frac{5}{4}}$$

$$x = 4^{-\frac{5}{4}}$$

$$\log_4 x = \log_4 4^{-\frac{5}{4}}$$

$$x = 4^{-\frac{5}{4}}$$

$$x = \frac{1}{4^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^5} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

($\frac{1}{4\sqrt{2}}$ soddisfa la c.e.)

ESEMPIO

$$32\log_4^3 x - 6\log_4 x - 1 = 0$$

- c.e.: $x > 0$

- Sostituzione $t = \log_4 x$:

$$32t^3 - 6t - 1 = 0 \quad (*)$$

$$32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 4 - 3 - 1 = 0 .$$

$t = \frac{1}{2}$ è una soluzione di $(*)$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 32 & 0 & -6 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 16 & 8 & 1 \\ \hline & 32 & 16 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(32t^2 + 16t + 2\right) = 0$$

$$2\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(16t^2 + 8t + 1\right) = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 = 0$$

$$2\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(4t + 1\right)^2 = 0 .$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \vee \quad t = -\frac{1}{4}$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \log_4 x = -\frac{1}{4}$$

$$x = 4^{\frac{1}{2}} \qquad\qquad x = 4^{-\frac{1}{4}}$$

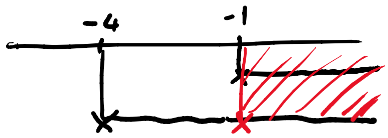
$$x = 2 \qquad\qquad x = \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzioni: $x = 2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (entrambe le soluzioni soddisfano la c.e)

<u>ESEMPIO</u>

$$\log_{\sqrt{2}}(x+1) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+4) = 2$$

- c.e : $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \iff x > -1$



$x > -1$.

- $\log_{\sqrt{2}}(x+1) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+4) = 2$

$$\log_{\sqrt{2}}(x+1) - \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x+4}\right) = 2$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+4}}\right) = 2$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+4}} = (\sqrt{2})^2$$

$$x+1 = 2\sqrt{x+4}$$

Ricordiamo le c.e.: $x > -1$.

$$(x+1)^2 = 4(x+4)$$

$$x^2+2x+1 = 4x+16$$

$$x^2-2x-15 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+15} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

$x = 5 \quad \vee \quad x = -3$. Verificheiamo le c.e.:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x = 5 \quad \vee \quad \cancel{x = -3} \end{cases}$$

$x = 5$ è l'unica soluzione.

Disequazioni con esponenziali e logaritmi:

Ricordare:

1) Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a > 1}$. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora:

$$x \le y \iff a^x \le a^y$$
$$x \ge y \iff a^x \ge a^y$$
$$x > y \iff a^x > a^y$$
$$x < y \iff a^x < a^y$$

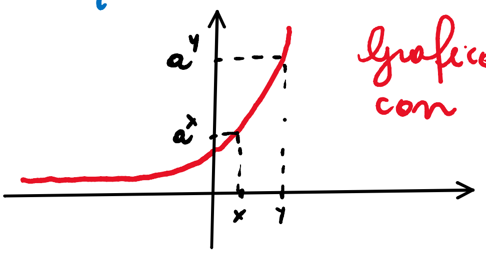


Grafico di a^x con $a > 1$

Se inoltre $x, y > 0$:

$$x \le y \iff \log_a x \le \log_a y$$
$$x \ge y \iff \log_a x \ge \log_a y$$
$$x > y \iff \log_a x > \log_a y$$
$$x < y \iff \log_a x < \log_a y$$

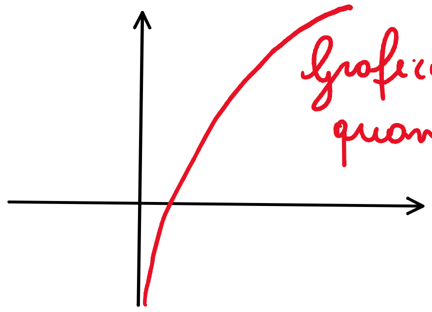


Grafico di $\log_a x$ quando $a > 1$

2) Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{0 < a < 1}$. Allora $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \le y \iff a^x \ge a^y$$
$$x \ge y \iff a^x \le a^y$$
$$x > y \iff a^x < a^y$$
$$x < y \iff a^x > a^y$$

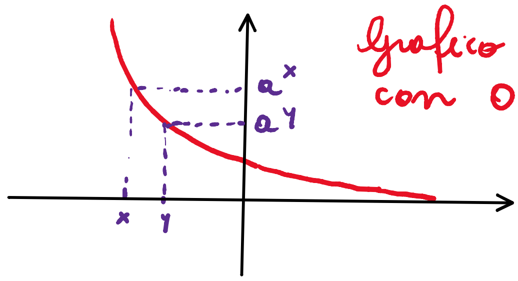


grafico di a^x con $0 < a < 1$

Se inoltre $x, y > 0$:

$$x \le y \iff \log_a x \ge \log_a y$$
$$x \ge y \iff \log_a x \le \log_a y$$
$$x > y \iff \log_a x < \log_a y$$
$$x < y \iff \log_a x > \log_a y$$

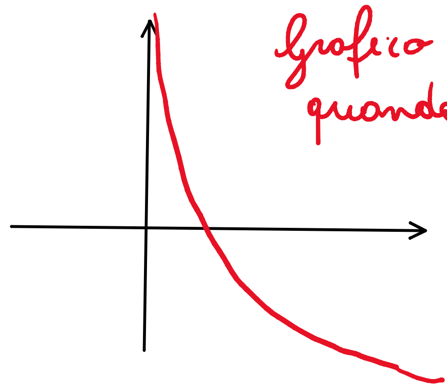


grafico di $\log_a x$ quando $0 < a < 1$

ESEMPIO

$$2^{x^2-4} - 3 \le 0$$
$$2^{x^2-4} \le 3$$

base $2 > 1$

$$x^2 - 4 \le \log_2 3$$
$$x^2 \le 4 + \log_2 3$$
$$-\sqrt{4+\log_2 3} \le x \le \sqrt{4+\log_2 3}$$

$$\left(4 + \log_2 3 = \; = \log_2 2^4 + \log_2 3 = \log_2 48 \right)$$

ESEMPIO

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \ge 3 \qquad \left(\text{base } \tfrac{1}{2} < 1\right)$$

- c.e.: $x + 3 > 0 \iff x > -3$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \ge 3$

$$x + 3 \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^3$$
$$x + 3 \le \tfrac{1}{8}$$
$$x \le \tfrac{1}{8} - 3 = -\tfrac{23}{8}$$

Conclusione:

$$\begin{cases} x \leq -\frac{23}{8} \\ x > -3 \end{cases} \iff -3 < x \leq -\frac{23}{8}.$$

ESEMPIO

$$\frac{1}{\log_5(x-1)} \leq -1$$

- c.e. $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_5(x-1) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

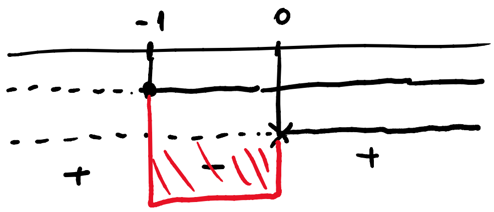
- $\dfrac{1}{\log_5(x-1)} \leq -1$

$$\frac{1}{\log_5(x-1)} + 1 \leq 0$$

$$\frac{1+\log_5(x-1)}{\log_5(x-1)} \leq 0$$

$t = \log_5(x-1)$

$$\frac{1+t}{t} \leq 0$$



$-1 \leq t < 0$

$$\begin{cases} t \geq -1 \\ t < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_5(x-1) \geq -1 \\ \log_5(x-1) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 \geq 5^{-1} \\ x-1 < 5^{0} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq \frac{6}{5} \\ x < 2 \end{cases}$$

$\frac{6}{5} \leq x < 2.$

Intersechiamo con le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} \frac{6}{5} \leq x < 2 \\ x > 1 \quad \wedge \; x \neq 2 \end{cases} \iff \frac{6}{5} \leq x < 2.$$

ESEMPIO

$$\frac{5^x - 125}{(e^{-x}-1)(2^x-4)} < 0$$

- $5^x - 125 \geq 0 \iff 5^x \geq 5^3 \iff x \geq 3$
- $e^{-x} - 1 > 0 \iff \frac{1}{e^x} - 1 > 0 \iff \frac{1-e^x}{e^x} > 0$, $e^x > 0$

$$\iff 1 - e^x > 0$$

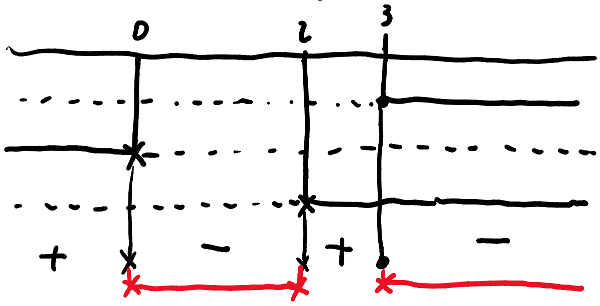
$$\iff e^x < 1$$

$$\iff x < 0$$

$$\left(e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > 1 \iff -x > 0 \iff x < 0 \right)$$

- $2^x - 4 > 0 \iff 2^x > 4 \iff x > 2$

Grafico dei segni:



$0 < x < 2 \;\vee\; x > 3.$