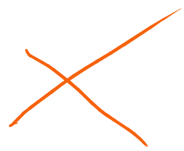
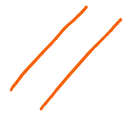
Siano r_1 e r_2 due rette in $\mathbb{R}^2$

- Si dice che r_1 ed r_2 sono INCIDENTI se si intersecano in un solo punto.



- Si dice che r_1 e r_2 sono PERPENDICOLARI (O ORTOGONALI) se sono incidenti e si incrociano formando 4 angoli retti.

- Si dice che r_1 e r_2 sono PARALLELE se non sono incidenti. Si può dimostrare che se r_1 e r_2 sono parallele allora o $\underbrace{r_1 \cap r_2 = \emptyset}_{\text{(PARALLELE DISTINTE)}}$ o $r_1 = r_2$



Come si determina la posizione reciproca di due rette a partire dalle loro equazioni?

In forma parametrica:

$r_1 = \{ P + tv \mid t \in \mathbb{R} \}$

$r_2 = \{ Q + sw \mid s \in \mathbb{R} \}$

- r_1 e r_2 sono parallele $\Leftrightarrow$ $\exists\, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $v = Kw$.
- r_1 e r_2 sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ $v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$.

Equazione cartesiana implicita:

$r_1: \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$r_2: \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

Si mettono a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Se $b_1 \neq 0$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1} x - \dfrac{c_1}{b_1} \\ a_2 x + b_2 \left(-\dfrac{a_1}{b_1} x - \dfrac{c_1}{b_1} \right) + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1} x - \dfrac{c_1}{b} \\ a_2 x - \dfrac{a_1 b_2}{b_1} x - \dfrac{b_2 c_1}{b_1} + c_2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \quad a_1 a_2 x - a_1 b_2 x - b_2 c_1 + b_1 c_2 = 0$$

$$x\,(\underbrace{a_1 b_2 - b_1 a_2}) = \underbrace{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

- Se $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ c'è un'unica soluzione del sistema. le rette r_1 e r_2 sono incidenti.
- Se $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ le rette sono parallele
    - Se $b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$ allora $r_1 = r_2$
    - Se $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$ sono parallele e distinte

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Nota 1: Se allineiamo i coefficienti:

$$\begin{array}{cccc} + & & & - \\ & a_1 & b_1 & c_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 \\ - & & & + \end{array}$$

$a_1 b_2 - b_1 a_2 \qquad b_1 c_2 - b_2 c_1$

Nota 2: La condizione $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ dice che (a_1, b_1) e (a_2, b_2) devono essere uno multiplo dell'altro.

ESEMPIO.

$$2x + y - 3 = 0$$
$$4x + 2y - 5 = 0$$

$2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$ le rette sono parallele.

I vettori $(a_1, b_1) = (2, 1)$ e $(a_2, b_2) = (4, 2)$ sono saddisfano $(a_2, b_2) = 2\,(a_1, b_1)$.

ESEMPIO

$$3x + y + 1 = 0$$
$$x - y + 2 = 0$$

$$3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -4 \neq 0$$

le rette sono incidenti. Se vogliamo trovare il punto di intersezione tra le due rette:

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Il punto di intersezione è $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

- $r_1: \ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
  $r_2: \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$$\boxed{r_1 \text{ e } r_2 \text{ ortogonali} \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0}$$

$2x + y + 3 = 0 \qquad (a_1, b_1) = (2, 1)$

$x - 2y + 1 = 0 \qquad (a_2, b_2) = (1, -2)$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 2 - 2 = 0$$

Le rette sono ortogonali.

Equazione in forma esplicita:

$r_1: \ y = m_1 x + q_1$

$r_2: \ y = m_2 x + q_2$

- Le rette sono parallele $\iff m_1 = m_2$
  In tal caso sono uguale se anche $q_1 = q_2$. Sono parallele e distinte se $m_1 = m_2$ e $q_1 \neq q_2$.
- Se $m_1 \neq m_2$ sono incidenti.
  Sono perpendicolari se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

ESEMPIO

$$\begin{matrix} 2x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y = -2x - 3 \\ y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$m_1 = -2$ e $m_2 = \frac{1}{2}$ quindi $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Le rette sono perpendicolari.

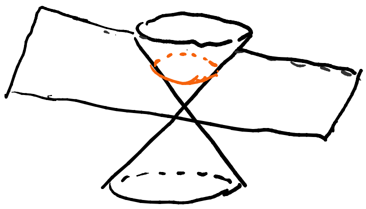
Coniche:

Def Una CONICA in $\mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che può essere rappresentato come insieme dei punti le cui coordinate soddisfano un' equazione polinomiale in due variabili di secondo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

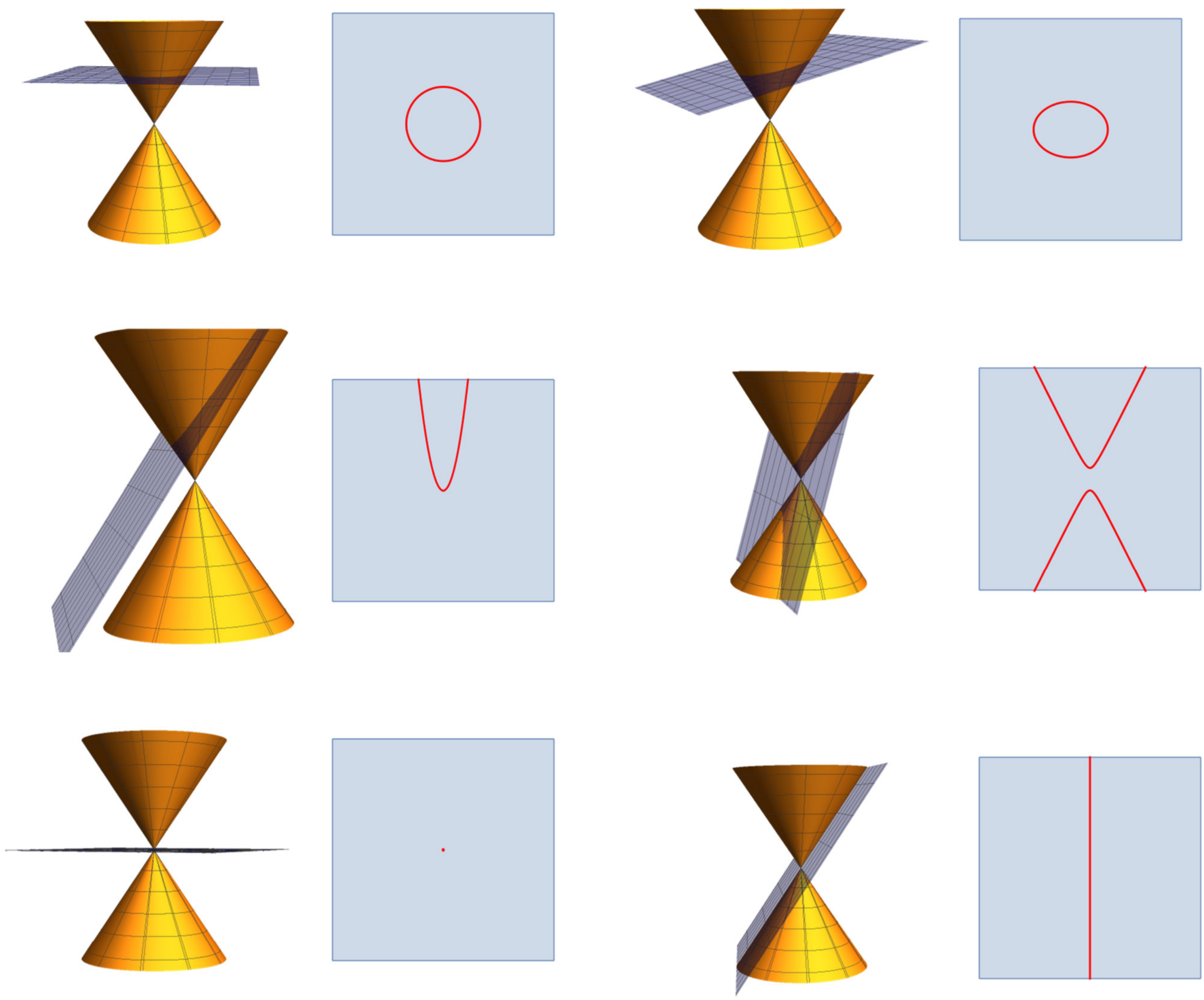
Perché si chiamano coniche?

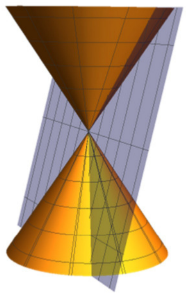
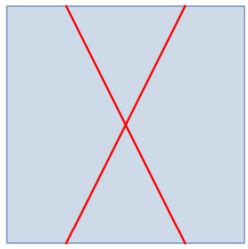
Si possono ottenere sezionando con un piano un un cono a due falde nello spazio



CONICHE NON DEGENERI
- ellisse (caso speciale: circonferenza)
- iperbole
- parabola

CONICHE DEGENERI
- punto
- retta
- due rette



A partire dall'equazione

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Come si stabilisce a che tipo di conica corrisponde?

$$\Delta_1 = 4AC - B^2$$

$$\Delta_2 = 4ACF + BDE - (AE^2 + FB^2 + CD^2)$$

- Se $\Delta_2 \neq 0$ abbiamo una conica non degenere:
  - iperbole: $\Delta_2 \neq 0$ e $\Delta_1 < 0$
  - parabola: $\Delta_2 \neq 0$ e $\Delta_1 = 0$
  - ellisse: $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_1 > 0$
  - Se $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_1 > 0$: non ci sono punti che soddisfano l'equazione ($\emptyset$).
- Se $\Delta_2 = 0$ coniche degeneri. (la classificazione completa verrà trattata nel corso di geometria 2)

Caso speciale $B = 0$.

$\Delta_1 = 4AC$ (il segno di Δ_1 dipende da quelli di A e C)

$\Delta_2 = 4ACF - AE^2 - CD^2$

Assumiamo $\Delta_2 \neq 0$. Allora

- Se A e C hanno segni opposti: iperbole
- Se uno tra A e C è 0: parabola
- Se A e C hano lo stesso segno: ellisse o $\emptyset$ (in base al segno di Δ_2)

Se $A = C$: circonferenza o $\emptyset$.

Circonferenza

Def: Una circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $r>0$ è l'insieme di punti che hanno distanza da (x_0, y_0) pari ad r.

Qual è l'equazione della circonferenza?

Vogliamo i punti $P=(x,y)$ che distano r da (x_0, y_0)

$$d((x,y),(x_0,y_0)) = r$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO r

Se svolgiamo i quadrati:

$$x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y y_0 + y_0^2 = r^2$$

$$x^2+y^2 - 2x x_0 - 2y y_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

È un'equazione polinomiale di secondo grado (in cui il coefficiente di x^2 e y^2 sono eguali)

Viceversa: Partiamo da una generica equazione del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se $A=C\neq 0$ possiamo dividere per A:

$$x^2+y^2+\underbrace{\frac{D}{A}}_{\alpha}x + \underbrace{\frac{E}{A}}_{\beta}y + \underbrace{\frac{F}{A}}_{\gamma} = 0$$

$$x^2+y^2+\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$x^2+\alpha x + y^2+\beta y + \gamma = 0$$

$$x^2+2\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + y^2+2\cdot\frac{\beta}{2}y + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0$$

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}{4}$$

- Se $\alpha^2+\beta^2-4\gamma>0$ l'equazione rappresenta una circonferenza di centro $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}$
- Se $\alpha^2+\beta^2-4\gamma=0$ punto $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$
- Se $\alpha^2+\beta^2-4\gamma<0$ l'eq. non è mai soddisfatta ($\emptyset$)

ESEMPIO

$$2x^2+2y^2+4x-10y+1=0$$

$$x^2+y^2+2x-5y+\frac{1}{2}=0$$

$$x^2+2x+y^2-5y+\frac{1}{2}=0$$

$$x^2+2x+1-1+y^2-5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}=0$$

$$(x+1)^2-1+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}=0$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{25}{4}$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$$

circonferenza di centro $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ e raggio

$$r=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ESEMPIO

$$x^2+y^2+3x+10=0 \qquad ?$$

$$x^2+3x+y^2+10=0$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+10=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\underbrace{\frac{9}{4}-10}_{}$$

$$=-\frac{31}{4}<0$$

L'equazione non è soddisfatta da nessun punto.

ESEMPIO

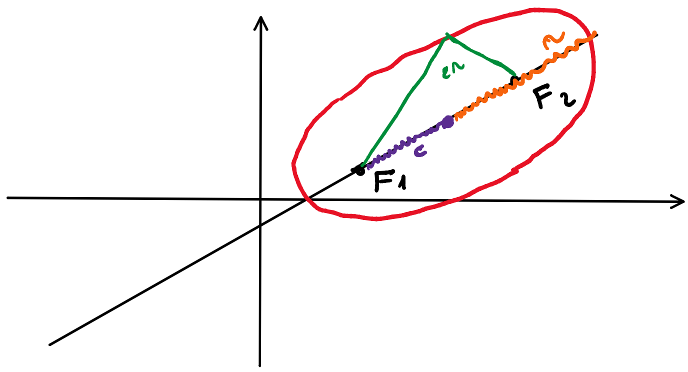
$$9 - 3x^2 + 4y - 3y^2 = 0$$
$$-3x^2 - 3y^2 + 4y + 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y - 3 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} - 3 = 0$$
$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 3 + \frac{4}{9}$$
$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{31}{9}$$

Circonferenza di centro $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ e raggio $\frac{\sqrt{31}}{3}$

Ellisse:

Def: Siano $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$. Sia $c = \frac{1}{2} d(F_1, F_2)$ e sia $r \in \mathbb{R}$ $r > c$. Definiamo ELLISSE di FUOCHI F_1 e F_2 e SEMIASSE MAGGIORE di lunghezza r, l'insieme:

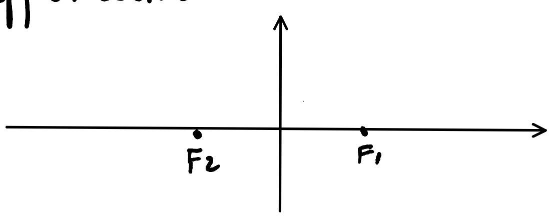
$$\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2r \}$$



Termini utili:

- Il punto medio tra F_1 e F_2 si dice CENTRO dell'ellisse
- la retta passante per F_1 e F_2 si dice ASSE FOCALE.
- I punti ottenuti intersecando l'ellisse con l'asse focale o con la perpendicolare all'asse focale passante per il centro si dicono VERTICI o ESTREMI

- Caso particolare: Supponiamo che $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$



Se $P = (x, y)$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2r$$

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=4r^2$$

$$2x^2+2c^2+2y^2+2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}=4r^2$$

$$\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = 2r^2-x^2-y^2-c^2$$

$$\underbrace{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)}_{\parallel}$$

$$\boxed{\cancel{x^4}+\cancel{y^4}+\cancel{c^4}-2x^2c^2+\cancel{2x^2y^2}+\cancel{2y^2c^2}}$$

$$4r^4+\cancel{x^4}+\cancel{y^4}+\cancel{c^4}-4r^2x^2-4r^2y^2-4r^2c^2+\cancel{2x^2y^2}+2x^2c^2+\cancel{2y^2c^2}$$

$$-4x^2c^2 = 4r^4-4r^2x^2-4r^2y^2-4r^2c^2$$

$$x^2(r^2-c^2)+y^2r^2 = r^4-r^2c^2$$

Dividendo per il membro di destra troviamo:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-c^2}=1$$

In modo simile, se $F_1=(0,c)$ e $F_2=(0,-c)$:

$$\frac{x^2}{r^2-c^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

In entrambi i casi, abbiamo trovato un' eq. del tipo: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

- **Più in generale:**

Dato un punto (x_0, y_0) un' equazione del tipo

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

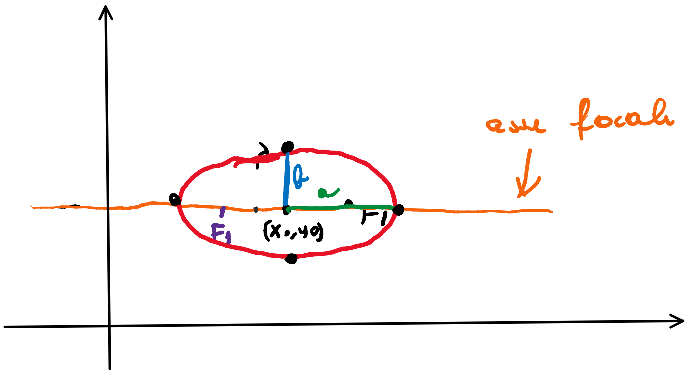
descrive un' ellisse in cui:

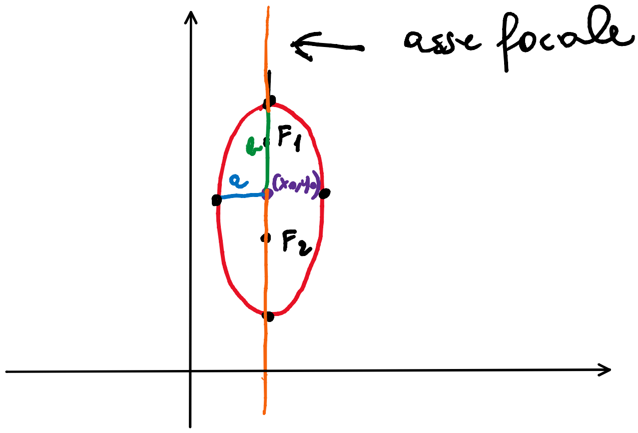
- (x_0, y_0) è il punto medio tra i fuochi dell'ellisse e viene detto CENTRO dell' ellisse.
- a e b rappresentano le lunghezze dei semiassi.
- Se $a > b > 0$ i fuochi dell' ellisse sono $F_1=(x_0+c, y_0)$ e $F_2=(x_0-c, y_0)$ dove $c=\sqrt{a^2-b^2}$

La retta $y = y_0$ è detta ASSE FOCALE (è la retta che passa per i due fuochi).

- Se $b > a > 0$ i fuochi sono
  $F_1 = (x_0, y_0 + c)$, $F_2 = (x_0, y_0 - c)$ dove $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
  L'asse focale è la retta $x = x_0$

- Se $a > b$:
- Se $a < b$





In entrambi i casi i punti $(x_0 \pm a, y_0)$ e $(x_0, y_0 \pm b)$ si dicono VERTICI o ESTREMI dell'ellisse.

In generale, se abbiamo un'equazione del tipo
$$A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

- Supponiamo che abbiano lo stesso segno
  Possiamo scrivere $A = \frac{1}{a^2}$ $C = \frac{1}{b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + D x + E y + F = 0$$

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2 + D a^2 x\right) + \frac{1}{b^2}\left(y^2 + E b^2 y\right) + F = 0$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\left(x + \frac{D a^2}{2}\right)^2 - \frac{D^2 a^4}{4}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\left(y + \frac{E b^2}{2}\right)^2 - \frac{E^2 b^4}{4}\right) + F = 0$$

$$\frac{1}{a^2}\left(x + \frac{D a^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(y + \frac{E b^2}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{D^2 a^2}{4} + \frac{E^2 b^2}{4} - F}_{= K}$$

• se $K>0$:

$$\frac{1}{a^2K}\left(x+\frac{Da^2}{2}\right)^2+\frac{1}{b^2K}\left(y+\frac{Eb^2}{2}\right)^2=1$$

Ellisse di centro $\left(-\frac{Da^2}{2},-\frac{Eb^2}{2}\right)$ e semiassi di lunghezza $a\sqrt{K}$ e $b\sqrt{K}$

• $K=0$ punto: $\left(-\frac{Da^2}{2},-\frac{Eb^2}{2}\right)$

• $K<0$ $\emptyset$.

ESEMPIO

$$4x^2+\frac{y^2}{9}+2x-1=0$$

4 e $\frac{1}{9}$ hanno lo stesso segno.

$$4x^2+2x+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$$4\left(x^2+\frac{x}{2}\right)+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$$4\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$$4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$$4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$$

$$4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{y^2}{9}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{16}{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{4}{45}y^2=1$$

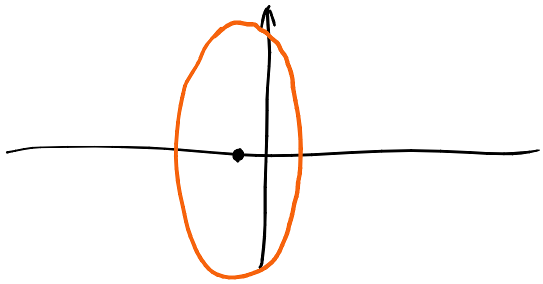
$$\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{5}{16}}+\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1$$

ELLISSE di centro $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ e semiassi di lunghezza $a=\frac{\sqrt{5}}{4}$ $b=\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{\frac{45}{4}-\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{175}}{4}$$

Fuochi: $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{175}}{4}\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{175}{4}}\right)$.

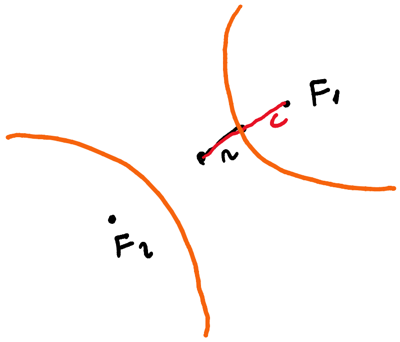
Asse focale: $x = -\frac{1}{4}$



Iperbole

Def: Siano $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $F_1 \neq F_2$. Sia $c = \frac{1}{2} d(F_1, F_2) > 0$. Fissiamo $0 < r < c$. Definiamo IPERBOLE di FUOCHI F_1 E F_2 e SEMIASSE TRASVERSO r l'insieme:

$$\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2r \}$$



Si dimostra che l'equazione di un'iperbole i cui fuochi si trovano su una retta orizzontale (detta ASSE FOCALE) è del

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

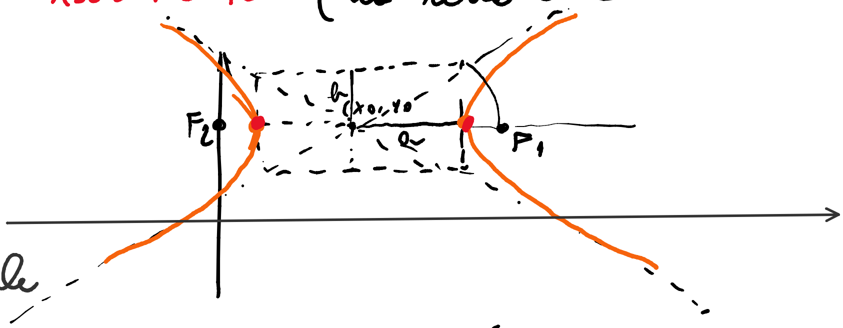
Se i fuochi sono su un asse verticale:

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Nel primo caso: $\displaystyle \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

- (x_0, y_0) è il CENTRO dell'iperbole (cioè il punto medio tra i due fuochi).

- Fuochi: $(x_0 \pm c, \; y_0)$ dove $c = \sqrt{a^2+b^2}$
- la retta $y = y_0$ è l'ASSE FOCALE (la retta che passa per F_1 e F_2).



le rette

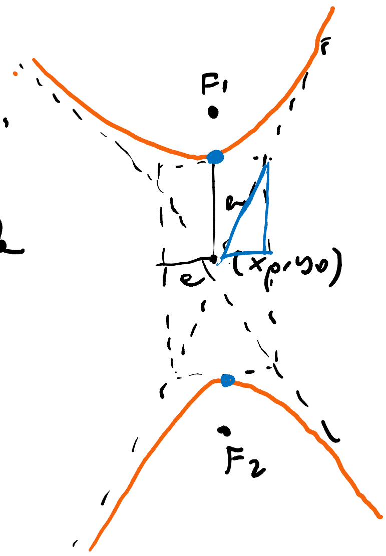
$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x-x_0)$$

si dicono ASINTOTI dell'iperbole

I punti $(x_0+a, \; y_0)$ e $(x_0-a, \; y_0)$ si dicono VERTICI o ESTREMI dell'iperbole

---

Nel caso $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$,



- l'iperbole ha asse focale orizzontale
  - centro (x_0, y_0)
  - Fuochi: $(x_0, \; y_0 \pm c)$ $c = \sqrt{a^2+b^2}$
  - Asintoti:
    $$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x-x_0)$$
  - Vertici $(x_0, \; y_0 \pm b)$

In generale data un'equazione del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se A e C hanno segni opposti (ad esempio $A>0$ e $C<0$)

$$A = \frac{1}{a^2} \qquad C = -\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{1}{a^2}(x-x_0)^2 - \frac{1}{b^2}(y-y_0)^2 = K$$

• Se $K=0$ l'equazione è soddisfatta da due rette

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$$

$$\left(\frac{x-x_0}{a}+\frac{y-y_0}{b}\right)\left(\frac{x-x_0}{a}-\frac{y-y_0}{b}\right)=0$$

$$\underbrace{\frac{x-x_0}{a}+\frac{y-y_0}{b}=0}_{\text{retta}} \quad \vee \quad \underbrace{\frac{x-x_0}{a}-\frac{y-y_0}{b}=0}_{\text{retta}}$$

• Se $K\neq 0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2K}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2K}=1 \qquad \text{iperbole}$$

ESEMPIO

$$\frac{x^2}{2}-y^2+1=0$$

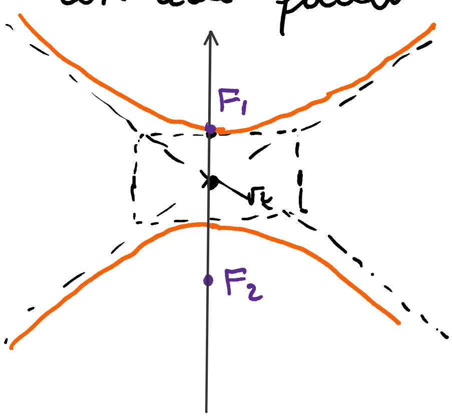
$$\frac{x^2}{2}-y^2=-1$$

$$-\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

$$y^2-\frac{x^2}{2}=1 \qquad \text{iperbole di centro } (0,0)$$

e semiassi di lunghezze $\sqrt{2}$ e 1

con asse focale verticale (asse focale $x=0$)



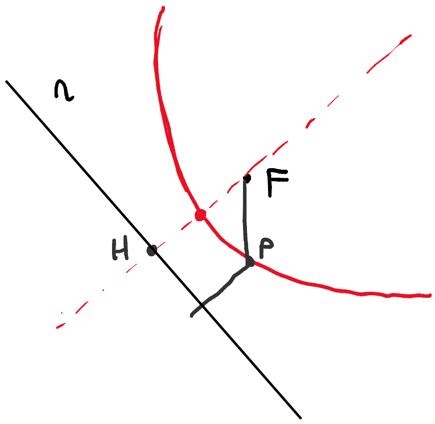
Fuochi:

$$c=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$$

$F_1=(0,\sqrt{3})$ e $F_2=(0,-\sqrt{3})$

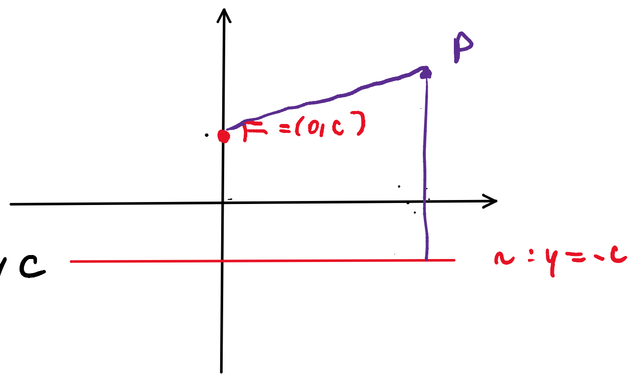
Parabola:

Sia $F \in \mathbb{R}^2$ e sia r una retta in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo $F \notin r$.
Definiamo PARABOLA di fuoco F e retta direttrice r l'insieme: $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,F) = d(P,r)\}$



- Se H è il punto di intersezione tra r e la retta perpendicolare a r passante per F, il punto medio tra H e F è un punto della parabola detto VERTICE.
- La retta perpendicolare ad r passante per F è detta ASSE della parabola.

- Se r è orizzontale con equazione $y=-c$ e $F=(0,c)$ allora $P=(x,y)$ appartiene alla parabola se e solo se $\sqrt{x^2+(y-c)^2} = |y+c|$



elevando al quadrato:

$$x^2+(y-c)^2 = y^2+c^2+2yc$$

$$x^2+\cancel{y^2}+\cancel{c^2}-2yc = \cancel{y^2}+\cancel{c^2}+2yc$$

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

In generale $y = a(x-x_0)^2+y_0$ descrive una parabola di vertice (x_0,y_0)

fuoco $F=\left(x_0, y_0+\frac{1}{4a}\right)$ e direttrice $y = y_0 - \frac{1}{4a}$

In generale se abbiamo un'equazione della forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Se $C = 0$ e $E \neq 0$ l'equazione rappresenta una parabola con asse verticale e direttrice orizzontale.
Se dividiamo per E e esplicitiamo y troviamo:

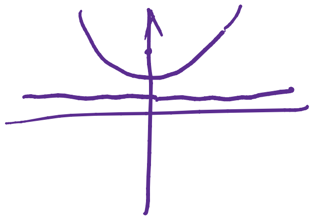
$$y = a x^2 + b x + c$$

VERTICE : $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac.$

DIRETTRICE : $y = -\frac{\Delta+1}{4a}$

FUOCO : $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

ASSE : $x = -\frac{b}{2a}$



In modo simile

$$A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

se $A = 0$ e $D \neq 0$.
l'equazione rappresenta una parabola con asse orizzontale e direttrice verticale.

Esplicitando x:

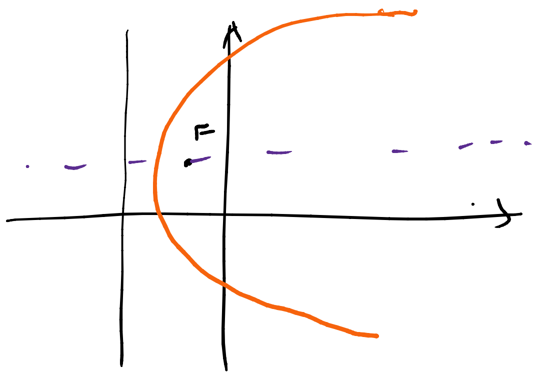
$$x = a y^2 + b y + c$$

VERTICE : $\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

FUOCO : $\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

DIRETTRICE $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

ASSE $y = -\frac{b}{2a}$



<u>Nota</u>: Le parabole con asse orizzontale si ottengono da quelle con asse verticale riflettendo rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante:

$$y = a x^2 + b x + c$$
$$x = a y^2 + b y + c$$