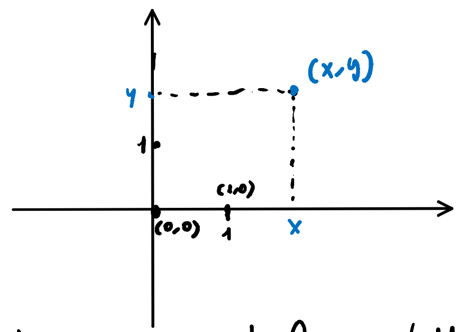
ELEMENTI DI MATEMATICA - LEZIONE 10

martedì 26 settembre 2023 09:00

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

Possiamo rappresentare $\mathbb{R}^2$ come un piano in cui fissiamo:

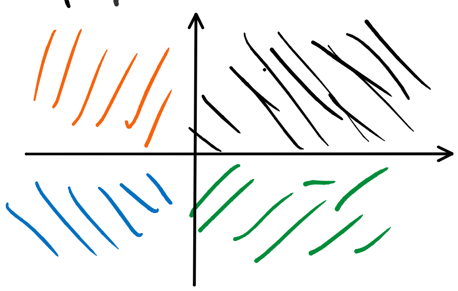
- un punto detto ORIGINE (che identifichiamo con $(0,0)$)
- due assi perpendicolari passanti per $(0,0)$
- un verso di percorrenza su ogni asse.
- Un'unità di misura su ogni asse (possibilmente la stessa)



Possiamo identificare ogni coppia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con un punto del piano.

L'asse orizzontale è detto ASSE DELLE ASCISSE (o asse x)
L'asse verticale è detto ASSE DELLE ORDINATE (o asse y)

- Il piano è diviso dagli assi in 4 QUADRANTI:



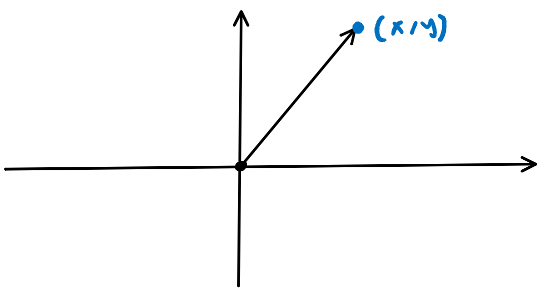
$Q_1 = \{(x,y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ (PRIMO QUADRANTE)

$Q_2 = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \geq 0\}$ (SECONDO QUADRANTE)

$Q_3 = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0\}$ (TERZO QUADRANTE)

$Q_4 = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \leq 0\}$ (QUINTO QUADRANTE)

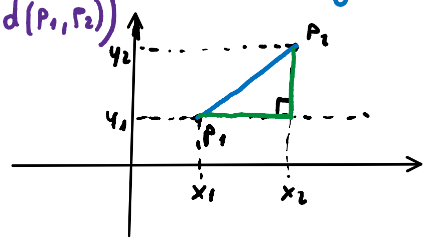
- Spesso è conveniente identificare i punti del piano come dei vettori che indicano una direzione e un verso



Ogni punto del piano diverso da $(0,0)$ si può identificare con il vettore che congiunge $(0,0)$ a (x,y).

Def: Dati $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ si dice DISTANZA tra P_1 e P_2 la lunghezza del segmento che congiunge P_1 e P_2 (si indica con $d(P_1, P_2)$)

$$\boxed{\begin{aligned} d(P_1,P_2) &= \sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \end{aligned}}$$



(Può essere calcolata usando il teorema di Pitagora)

ESEMPIO

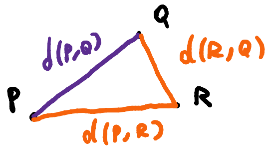
$P_1 = (1, 4)$

$P_2 = (-3, 3)$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(1+3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

PROPRIETÀ DELLA DISTANZA

1) $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}^2$, $\quad d(P,Q) \geq 0$
2) $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}^2$: $\quad d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
3) $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}^2$: $\quad d(P,Q) = d(Q,P)$
4) $\forall\, P, Q, R \in \mathbb{R}^2$: $\quad d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ (PROPRIETÀ TRIANGOLARE in $\mathbb{R}^2$)



OSS Se $P_1 = (x_1, 0)$, $P_2 = (x_2, 0)$ allora:

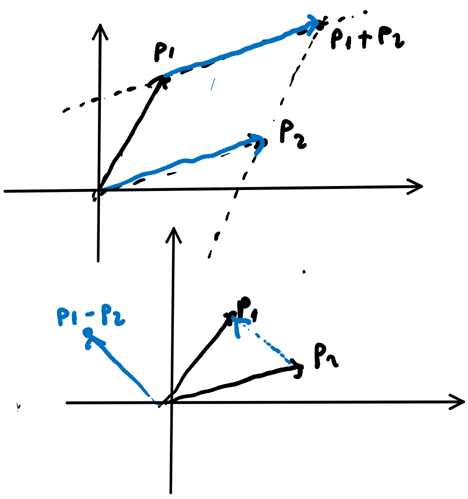
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

Operazioni in $\mathbb{R}^2$:

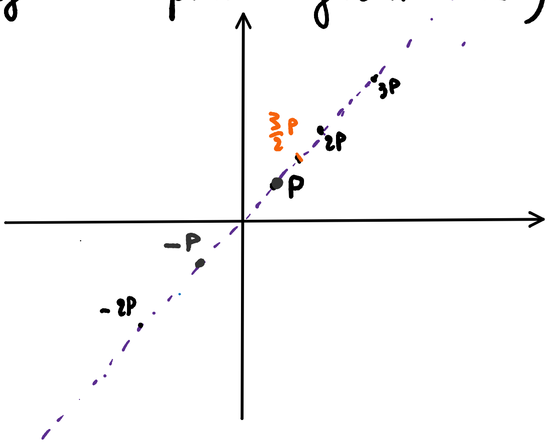
Siano $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$: $\quad P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$

Definiamo:

- $P_1 + P_2 := (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$
- $P_1 - P_2 := (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$
- $\forall\, t \in \mathbb{R}$: $\quad tP_1 = (tx_1,\ ty_1)$. $\quad$ (cioè $t(x,y) = (tx, ty)$)



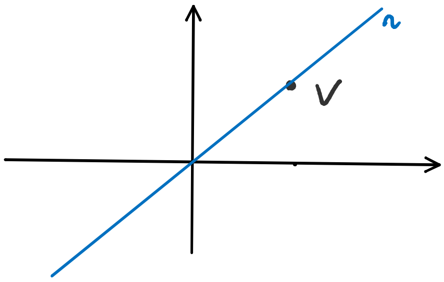
(regola del parallelogramma)



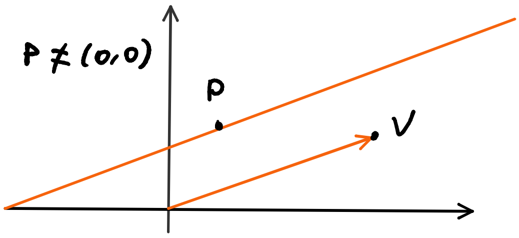
Rette in $\mathbb{R}^2$: Siano $p \in \mathbb{R}^2$ e $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiamo **RETTA** passante per p e parallela alla direzione di v l'insieme: $\{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ESEMPI

- $p = (0,0)$: $r = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$



- $p \neq (0,0)$



$r = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Esistono altri modi di rappresentare le rette nel piano:

PROPOSIZIONE Sia $p = (x_0, y_0)$ e sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Consideriamo la retta $r = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Sia $Q \in \mathbb{R}^2$, $Q = (x, y)$ allora sono equivalenti:

1) $Q \in r$
2) $ax + by + c = 0$ dove $\begin{cases} a = v_2 \\ b = -v_1 \\ c = v_1 y_0 - v_2 x_0 \end{cases}$ $(*)$

DIM

1) $\Rightarrow$ 2) Se $Q \in r$, allora $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tale che

$Q = p + tv \iff (x, y) = (x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 x = x_0 v_2 + t v_1 v_2 \\ v_1 y = y_0 v_1 + t v_1 v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 x - v_1 y = x_0 v_2 - y_0 v_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_2}_{a} x \underbrace{- v_1}_{b} y + \underbrace{y_0 v_1 - x_0 v_2}_{c} = 0$$

Quindi: $ax + by + c = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $Q = (x, y)$ con $ax + by + c = 0$ dove a, b, c sono definiti da $(*)$.

$v_1 \neq 0$: definiamo $t = \dfrac{x - x_0}{v_1}$

Allora:

$$x_0 + t v_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{\cancel{v_1}} \cancel{v_1} = x$$

$$y_0 + t v_2 = y_0 + \frac{x - x_0}{v_1} v_2$$

Ma $v_2 x - v_1 y + v_1 y_0 - v_2 x_0 = 0$

$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0 \Rightarrow v_2(x - x_0) = v_1(y - y_0)$

Quindi:

$$y_0 + t v_2 = y_0 + \frac{x - x_0}{v_1} v_2 = y_0 + \frac{\cancel{v_1}(y - y_0)}{\cancel{v_1}} = y$$

Abbiamo trovato $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \Rightarrow Q = P + t v \in r. \qquad \square$$

Ricordare:

Ogni retta si può rappresentare tramite un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$ (EQUAZIONE CARTESIANA IN FORMA IMPLICITA)

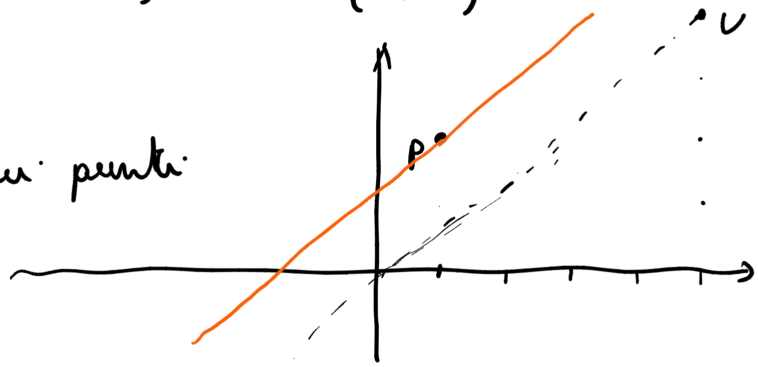
Viceversa: Data un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, se $(a, b) \neq 0$, l'insieme $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$ è una retta.

$$P + tV \rightsquigarrow ax + by + c = 0 \text{ con } \begin{cases} a = v_2 \\ b = -v_1 \\ c = y_0 v_1 - x_0 v_2 \end{cases}$$

$$ax + by + c = 0 \rightsquigarrow P + tv$$ dove $V = (-b, a)$ e P è un qualsiasi punto che soddisfa l'equazione.

ESEMPIO

· $r = \{ P + tV \mid t \in \mathbb{R} \}$ $P = (1, 2)$ e $V = (5, 4)$



r è l'insieme dei punti (x, y) con

$$\begin{cases} x = 1 + t5 \\ y = 2 + t4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5} = t \\ \frac{y-2}{4} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4}$$

$$4x - 4 = 5y - 10$$

$$4x - 5y + 6 = 0.$$

ESEMPIO

$$2x - y + 3 = 0$$

$$V = (1, 2)$$

$x = 0 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ $P = (0, 3)$

$$P + tV \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$$

OSS: $ax + by + c = 0$

- se $b = 0$: $x = -\frac{c}{a}$
- se $b \neq 0$: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

(EQUAZIONE CARTESIANA IN FORMA ESPLICITA)

Ricapitolando:

Le rette si possono rappresentare nei seguenti modi:

1) $r = \{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2) Equazione cartesiana in forma implicita:

$ax + by + c = 0$ (con $(a, b) \neq (0,0)$)

3) Equazione cartesiana in forma esplicita

$y = mx + q$ (se la retta non è verticale)

m: COEFFICIENTE ANGOLARE

q: TERMINE NOTO.

Retta passante per due punti:

Dati due punti $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ con $P_1 \neq P_2$ esiste un'retta che passa per P_1 e P_2.

Come si determina?

Forma parametrica: $P_1 + t(P_2 - P_1)$

Forma cartesiana: $v = P_2 - P_1$. Assumiamo che:

$P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Allora:

$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0$$

$$\boxed{(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0}$$

Se $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Equazione in forma esplicita (se $x_1 \neq x_2$)

$$y=mx+q$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad q=y_1-mx_1$$

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$$

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

ESEMPIO

$P_1=(1,3) \qquad P_2=(-1,4)$

Retta passante per P_1 e P_2:

Forma parametrica: $\quad v=P_2-P_1=(-2,1)$

$P_1+t(-2,1)$ o $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \end{cases}$

$\underbrace{(1,3)}_{P_1} \quad \underbrace{(-2t,+t)}_{vt}$

Forma cartesiana implicita

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1)$$

$$(4-3)(x-1) = -2\cdot(y-3)$$

$$x-1 = -2y+6$$

$$x+2y-7=0.$$

Forma cartesiana esplicita

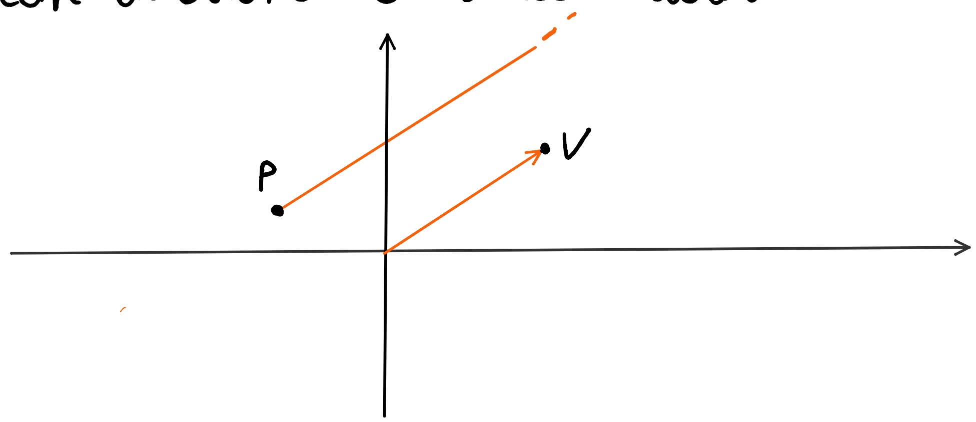
$$x+2y-7=0$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

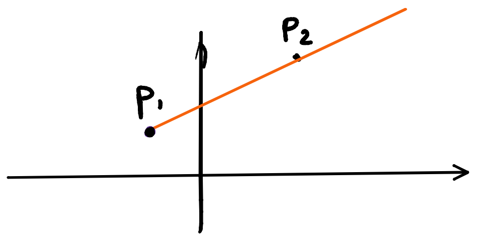
Commenti sulla forma parametrica

- $r=\{P+tV \mid t\in\mathbb{R}\}$ retta passante per P e parallela alla direzione V V.

- $\{P+tV \mid t\geq 0\}$ semiretta uscente da P con con direzione e verso determinati da V.



- $\{P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \geq 0\}$ è la semiretta uscente da P_1 e passante per P_2:



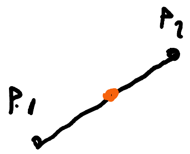
- $\{P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \in [0,1]\}$ è il segmento tra P_1 e P_2

- PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO che congiunge P_1 e P_2

P_1 e P_2 è $\frac{P_1+P_2}{2} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Infatti: $\frac{P_1+P_2}{2} = P_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1)$ e

$$d\left(P_1, \frac{P_1+P_2}{2}\right) = \frac{1}{2} d(P_1, P_2) = d\left(P_2, \frac{P_1+P_2}{2}\right)$$

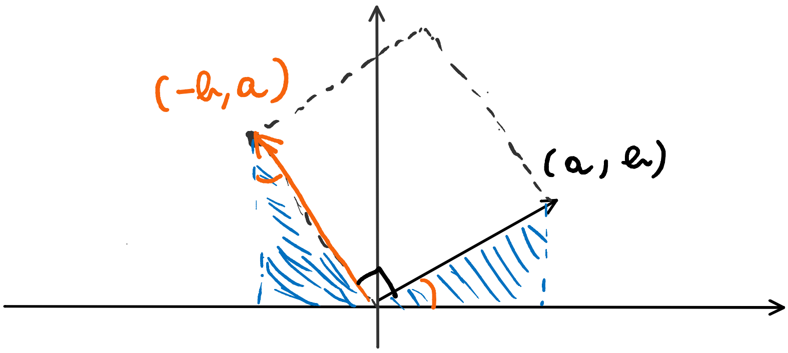


Osservazioni sulle equazioni cartesiane implicite

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con } (a, b) \neq (0,0)$$

- Se $b = 0$ è una retta verticale
- Se $a = 0$ è una retta orizzontale
- La direzione della retta è individuata da $v = (-b, a)$.

Si può dimostrare che (a, b) e $(-b, a)$ definiscono direzioni perpendicolari.

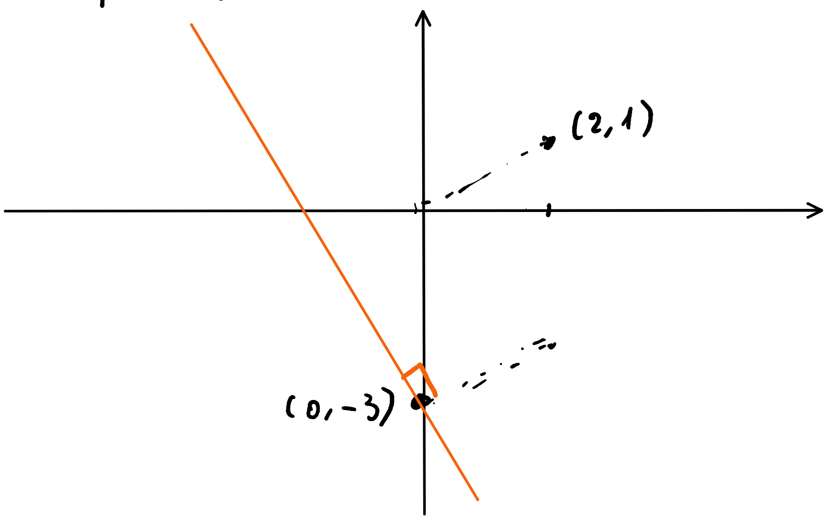


$ax + by + c = 0$ è una retta perpendicolare alla direzione (a, b).

ESEMPIO

$2x + y + 3 = 0$

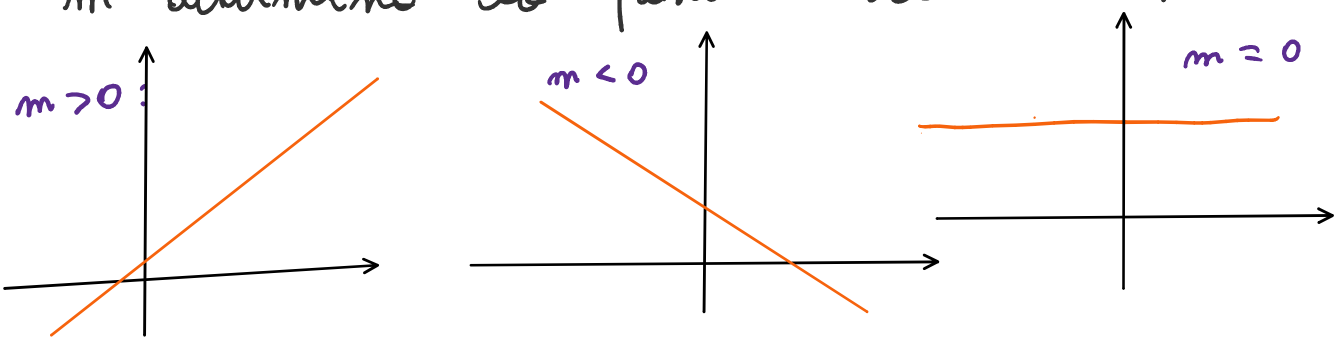
- è perpendicolare alla direzione $(2,1)$.
- passa per $(0,-3)$



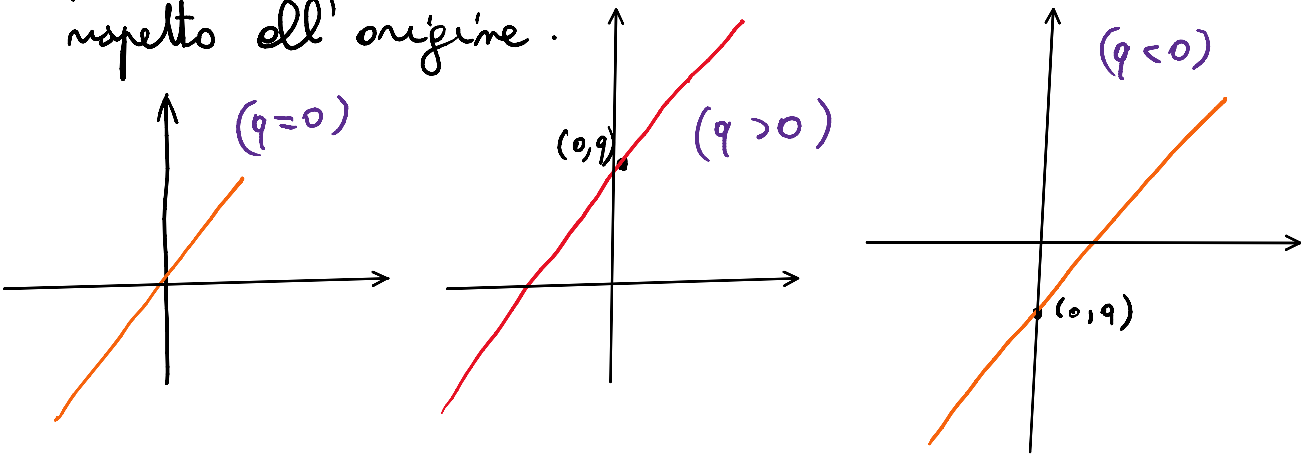
Osservazioni sulla forma cartesiana esplicita.

- $y = mx + q$

  m determina la pendenza della retta.



- q specifica quanto lontana è la retta rispetto all'origine.

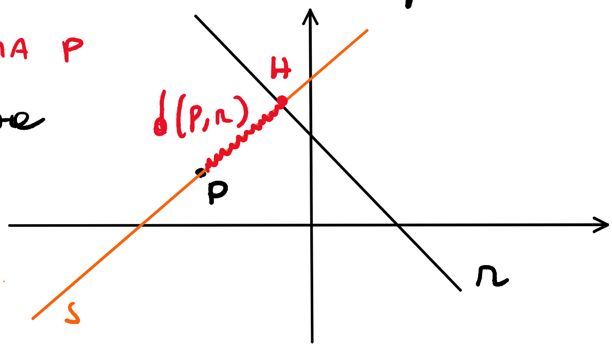


- $\forall\, m, q \in \mathbb{R}$ la funzione $f_{m,q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto mx+q$ ha per grafico la retta di equazione $y = mx+q$

Distanza punto/retta

Sia $P \in \mathbb{R}^2$ e sia r una retta di equazione $ax + by + c = 0$. Assumiamo che $P \notin r$. Indichiamo con H il punto ottenuto intersecando r con la retta perpendicolare ad r passante per P. Definiamo DISTANZA TRA P E LA RETTA r la distanza tra P ed H. Cioè:

$$d(P,r) := d(P,H)$$



Come si calcola?

$P = (x_0, y_0)$

$s = \{ P + t(a,b) \mid t \in \mathbb{R} \}$ (retta perpendicolare ad r)

Cerchiamo il punto H. Dato che $H \in S$ allora $\exists$ $t \in \mathbb{R}$ t.c. $H=(x,y)$ con $\begin{cases} x = x_0 + t a \\ y = y_0 + t b \end{cases}$.

Dato che $H \in r$:

$$a(x_0 + t a) + b(y_0 + t b) + c = 0$$

$$a x_0 + t a^2 + b y_0 + t b^2 + c = 0$$

$$t = -\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2 + b^2}$$

$$H = \left(x_0 - \frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2+b^2} a , y_0 - \frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2+b^2} b \right)$$

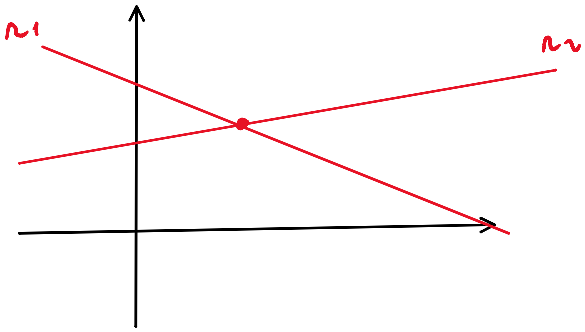
$$d(P,H) = \sqrt{\left(\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2+b^2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2+b^2}\right)^2 b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(a x_0 + b y_0 + c)^2}{a^2+b^2}} = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Formula per la distanza punto / retta:

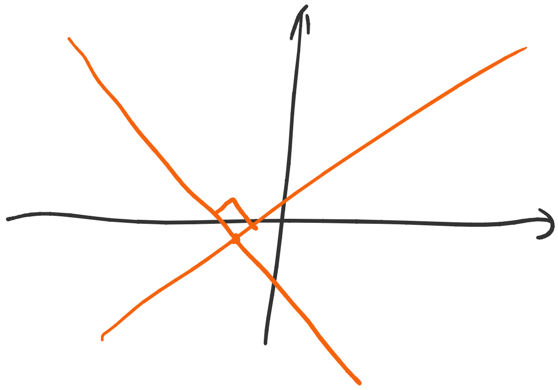
$$\boxed{d(P,r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

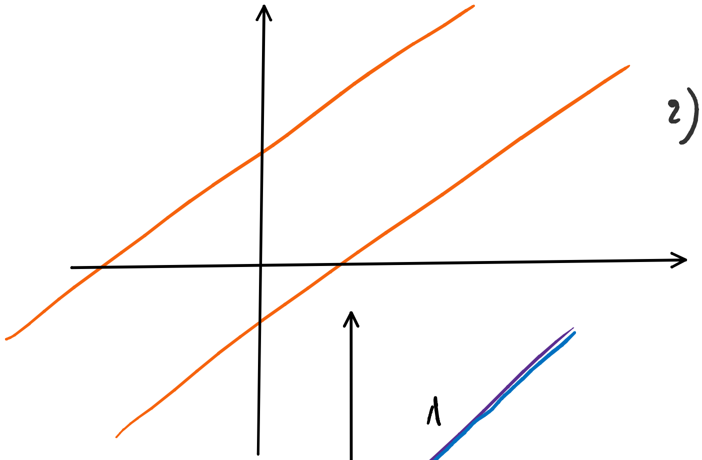
Due rette nel piano possono essere:



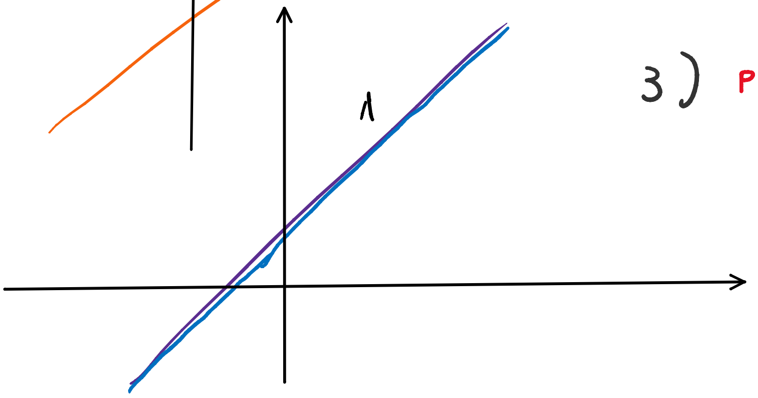
1) INCIDENTI se si intersecano in un solo punto.

Come caso particolare possono essere PERPENDICOLARI se sono incidenti e si incrociano formando 4 angoli retti.





2) PARALLELE E DISTINTE se non si intersecano mai.



3) PARALLELE E COINCIDENTI se $r_1 = r_2$.