

Insegnamento di: Istituzioni di Analisi Superiore 1			
Classe di laurea: L-35 – Scienze Matematiche		Corso di Laurea in: Matematica	Anno accademico: 2020/2021
Denominazione inglese insegnamento: Elements of Advanced Analysis 1		Tipo di insegnamento: Obbligatorio	Anno: 3 Semestre: 1
Tipo attività formativa: b – Attività caratterizzante	Ambito disciplinare: Formazione Teorica	Settore scientifico-disciplinare: MAT/05	CFU totali: 7 di cui CFU lezioni: 6 CFU ese/lab/tutor: 1
Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale ore di lezione: 48 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 24 totale ore didattica assistita: 72 totale ore di studio individuale: 103			
Lingua di erogazione: Italiano	Obbligo di frequenza: no		
Docente: Lorenzo D'Ambrosio	Tel: +39 080 5442692 e-mail: lorenzo.dambrosio@uniba.it	Ricevimento studenti: Dip. Matematica Stanza 16, III piano	Giorni e ore ricevimento: Su appuntamento.
Conoscenze preliminari: Le conoscenze che in genere vengono acquisite nei primi due anni di una laurea della classe L-35. In particolare: analisi matematica classica in una e più variabili, topologia generale, algebra lineare.			
Obiettivi formativi: Acquisizione degli strumenti di base dell'analisi moderna, con particolare riferimento alla teoria della misura, alla teoria elementare degli spazi di Hilbert e degli spazi L^p e agli elementi di base dell'analisi delle funzioni di una variabile complessa.			
Risultati di apprendimento previsti	<p>Conoscenza e capacità di comprensione: Acquisizione di concetti fondamentali dell'analisi moderna e dell'analisi complessa elementare. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.</p> <p>Conoscenza e capacità di comprensione applicate: Le conoscenze teoriche acquisite si utilizzano in vasta parte della matematica e delle sue applicazioni.</p> <p>Autonomia di giudizio: Capacità di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione. Capacità di individuare i giusti strumenti matematici e le giuste tecniche per affrontare problemi matematica complessi.</p> <p>Abilità comunicative: Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.</p> <p>Capacità di apprendere: Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato dalla consultazione dei testi e dalla risoluzione di esercizi e quesiti proposti periodicamente durante il corso.</p>		
Programma del corso			
<p>1. Teoria della misura e dell'integrazione astratta: σ-algebre, insiemi misurabili, funzioni misurabili – proprietà elementari della misura – integrazione di funzioni positive e di funzioni a valori complessi – proprietà di convergenza per successioni di integrali: teoremi di Beppo Levi, di Fatou, di Lebesgue – serie di integrali – completamento di una misura – teorema di Severini-Egoroff – teorema di passaggio al limite di Vitali.</p> <p>2. Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^N: pluriintervalli, misura esterna di Lebesgue, misura interna di Lebesgue – insiemi misurabili secondo Lebesgue – esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R}^N – misure</p>			

boreliane invarianti per traslazione – misura di Lebesgue e applicazioni lineari: l'interpretazione geometrica del determinante di una matrice.

3. Gli spazi L^p : disuguaglianze di Jensen, di Hölder e di Minkowsky – completezza degli spazi $L^p(\mu)$ – proprietà di continuità delle funzioni misurabili in \mathbb{R}^N : il teorema di Lusin – proprietà di densità negli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni continue a supporto compatto – $C_0(\mathbb{R}^N)$ come completamento in norma uniforme di $C_c(\mathbb{R}^N)$ – Separabilità degli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$.

4. Teoria elementare degli spazi di Hilbert: definizione, disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare – teorema di minima norma per convessi chiusi – teorema dei proiettori ortogonali – teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali su uno spazio di Hilbert – problema della migliore approssimazione – insiemi ortonormali, caratterizzazione degli insiemi ortonormali massimali, esistenza di insiemi ortonormali massimali – identità di Bessel, identità di Parseval, isomorfismo tra H e $l^2(A)$ – lo spazio $L^2(T)$ e le serie di Fourier – gli spazi $H^s(T)$ e $H^s(T^N)$ e relativi teoremi di immersione in $C(T)$ e $C(T^N)$ – Applicazioni alle equazioni differenziali e disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

Analisi complessa

5. Introduzione alla teoria delle funzioni olomorfe: derivabilità in senso complesso: proprietà, interpretazione geometrica – olomorfia e differenziabilità – equazioni di Cauchy–Riemann e corollari – alcune funzioni elementari: funzione esponenziale, funzioni trigonometriche, funzioni poldrome e loro selezioni, funzione logaritmo, funzione potenza – curve, cammini e circuiti – richiami sulle forme differenziali – omotopia – semplice connessione – relazioni tra chiusura ed esattezza di una forma differenziale – integrazione di funzioni complesse su cammini – primitive di funzioni complesse – forme differenziali associate a una funzione olomorfa – caratterizzazione dell'esistenza di primitive – serie di potenze complesse: raggio di convergenza, convergenza uniforme, teorema di Cauchy–Hadamard – test di Abel–Dirichlet – teorema di Abel – prodotto alla Cauchy – funzioni analitiche – analiticità dell'integrale di Cauchy.

6. Teorema di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe: teorema dell'indice di avvolgimento – teorema di Goursat – esistenza di primitive locali – formula integrale di Cauchy – analiticità delle funzioni olomorfe – teorema di Morera – formula di Cauchy per le derivate – stime di Cauchy per le derivate – teorema fondamentale dell'algebra – teorema di Liouville per funzioni olomorfe limitate e sue generalizzazioni – teorema di Morera–Weierstrass – applicazioni al calcolo di integrali.

7. Teorema degli zeri e funzioni armoniche: teorema degli zeri di una funzione olomorfa e corollari – unicità del prolungamento analitico – caratterizzazione dell'analiticità di funzioni di variabile reale – funzioni olomorfe e funzioni armoniche – proprietà del valor medio – formula di Pizzetti – caratterizzazione delle funzioni armoniche attraverso il loro valor medio – teorema di Liouville per funzioni positive e sue estensioni – principio di massimo per funzioni armoniche – teorema della media per funzioni olomorfe – principio del massimo modulo, principio del minimo modulo.

8. Teorema dei residui e applicazioni: singolarità isolate – serie di Laurent – teorema sulla sviluppabilità in serie di Laurent – classificazione delle singolarità isolate e loro caratterizzazioni – il teorema di Picard (enunciato) – definizione di residuo – calcolo del residuo in un polo – teorema dei residui – teorema di Cauchy (caso generale) – lemma di Jordan – funzioni meromorfe – teorema dell'indice logaritmico – teorema di Rouché e corollari – teorema dell'applicazione aperta – teorema dell'invertibilità locale – applicazioni al calcolo di integrali, serie ed equazioni alle differenze

Metodi di insegnamento:

Lezioni ed esercitazioni in aula.

Supporti alla didattica:

Dispense disponibili alla pagina

[Istituzioni di Analisi Superiore](https://lorenzodambrosio.altervista.org/blog/didattica/istituzioni-analisi-superiore/)

<https://lorenzodambrosio.altervista.org/blog/didattica/istituzioni-analisi-superiore/>

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:

Prova scritta e/o orale.

Testi di riferimento principali:

Per tutto il programma: W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill Book Company

Per la sola costruzione della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^N : N. FUSCO, P. MARCELLINI & C. SBORDONE, *Analisi Matematica due*, Liguori

Per l'analisi complessa è inoltre utile consultare

G. GILARDI, *Analisi 3*, Ed. Mc Graw–Hill; S. LANG, *Complex Analysis*, Springer–Verlag

Si vedano, inoltre, le dispense del corso.