Insegnamento di: Geometria Superiore 2

Classe di laurea:	**Corso di Laurea in:**	**Anno accademico:**
LM-40-Matematica	Matematica	2020/2021

Denominazione inglese insegnamento:	**Tipo di insegnamento:**	**Anno:**	**Semestre:**
Advanced Geometry 2	Obbligatorio/A scelta in dipendenza dell'orientamento		2

Tipo attività formativa:	**Ambito disciplinare:**	**Settore scientifico-disciplinare:**	**CFU totali:** 7
b - Attività caratterizzante	Formazione Teorica di base	MAT/03	di cui CFU lezioni: 6,5 CFU ese/lab/tutor: 0,5

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 52 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 8
totale ore didattica assistita: 60
totale ore di studio individuale: 115

Lingua di erogazione:	**Obbligo di frequenza:**	
Italiano	no	

Docente: Antonio Lotta	**Tel:** +390805442656 **e-mail:** antonio.lotta@uniba.it	**Ricevimento studenti:** Dip. Matematica piano II, stanza 7	**Giorni e ore ricevimento:** Su appuntamento

Conoscenze preliminari: Nozioni fondamentali riguardanti varietà differenziabili e gruppi di Lie. Nozioni di base riguardanti le metriche Riemanniane: connessione di Levi-Civita, geodetiche, curvatura.

Obiettivi formativi:
Acquisizione di alcuni argomenti avanzati di Geometria Riemanniana, con particolare riferimento alla teoria degli spazi omogenei, delle sommersioni Riemanniane ed alcuni risultati concernenti il legame tra curvatura e topologia.

Risultati di apprendimento previsti

Conoscenza e capacità di comprensione: Acquisizione di concetti fondamentali della geometria moderna su varietà Riemanniane. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.

Conoscenza e capacità di comprensione applicate: Le conoscenze teoriche acquisite si utilizzano in vasta parte della matematica e della fisica teorica.

Autonomia di giudizio: Capacità di comprendere e rielaborare dimostrazioni di risultati matematici significativi. Attitudine a testare alcuni fatti di carattere generale su esempi specifici.

Abilità comunicative: Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.

Capacità di apprendere: Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi e rielaborazione personale delle tecniche proposte durante le lezioni.

Programma del corso

Richiami sulle applicazioni differenziabili tra varietà. Richiami sulle sottovarietà, cenno alla differenza tra sottovarietà immerse e regolari (embedded). Richiamo sul Teorema dei valori regolari; esempio: il gruppo ortogonale O(n) è una sottovarieà regolare di GL(n,R). Controimmagine di una sottovarietà regolare mediante una sommersione surgettiva. Struttura locale delle applicazioni differenziabili di rango costante e conseguenze. Esistenza di sezioni locali per una sommersione. Il Lemma di Baire. Ogni applicazione differenziabile di rango costante surgettiva è una sommersione.

Spazi omogenei. Azioni differenziabili di gruppi di Lie su varietà. Campi vettoriali fondamentali. Quoziente di una varietà per una relazione di equivalenza regolare: Teorema di Godement (solo enunciato). Quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo chiuso. Ogni G-spazio omogeneo è un coset space a meno di diffeomorfismo G-equivariante. Le orbite di un'azione sono sottovarietà immerse. Esempi di spazi omogenei: varietà di Grassmann, varietà di Stiefel, varietà bandiera reali. Embedding della grassmanniana dei sottospazi k-dimensionali di R^n nello spazio delle matrici simmetriche di ordine n. Completezza dei campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie. Sottogruppi ad un parametro. Definizione dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Esempio: esponenziale di matrici. Il Teorema del sottogruppo chiuso (solo enunciato). Differenziabilità e naturalità dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Campi vettoriali fondamentali su una varietà generati da un'azione di un gruppo di Lie.

Teoria degli spazi omogenei Riemanniani. Varietà Riemanniane omogenee. Esempi. Rappresentazione di isotropia. Richiamo sull'integrazione su varietà orientate. Ogni rappresentazione di un gruppo di Lie compatto è una rappresentazione ortogonale rispetto ad un opportuno prodotto scalare. Criterio di esistenza di metriche Riemanniane invarianti su uno spazio omogeneo. Teorema di esistenza di metriche bi-invarianti su gruppi di Lie compatti. Spazi omogenei con rappresentazione di isotropia irriducibile. Campi di Killing e loro caratterizzazione. Formula di Nomizu per la curvatura di uno spazio Riemanniano omogeneo riduttivo. Spazi omogenei naturalmente riduttivi e relativa caratterizzazione in termini di geodetiche. Metriche normali, Teorema di Samelson. Metriche invarianti su gruppi di Lie. Geodetiche omogenee. Teorema di esistenza di geodetiche omogenee su varietà che ammettono un gruppo di isometrie transitivo semisemplice (Kowalski-Szenthe). Calcolo esplicito delle geodetiche sulla sfera n-dimensionale.

Campi di Killing su varietà Riemanniane compatte. Teorema di Stokes. Teorema della divergenza. Cenno al Teorema di Myers-Steenrod sul gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana. Dimensione massima del gruppo delle isometrie. Campi di Killing su varietà compatte: Teorema di Bochner. Applicazione al caso omogeneo; ogni varietà Riemanniana connessa, omogenea, compatta, con Ricci semidefinito negativo è un toro piatto. Campi di Killing su varietà compatte a curvatura positiva: Teorema di Berger.

L'applicazione esponenziale e i campi di Jacobi. Richiami sulle geodetiche, lemma di riscalamento. L'applicazione esponenziale di una varietà Riemanniana e relative proprietà fondamentali. Ogni isometria locale è determinata dall'immagine di un punto e dal suo differenziale nello stesso punto. Intorni normali, sfere geodetiche. Completezza geodetica degli spazi omogenei Riemanniani. Campi di Jacobi. Legame tra campi di Killing e campi di Jacobi. Teorema di esistenza ed unicità per i campi di Jacobi. Stima della dimensione dell'algebra di Lie dei campi di Killing.

Spazi simmetrici Riemanniani. Simmetrie geodetiche. Isometrie involutive con un punto fisso isolato. Definizione di spazio simmetrico Riemanniano. Esempi di spazi simmetrici: spazio Euclideo, sfere, gruppi di Lie dotati di metrica biinvariante, varietà di Grassmann. Ogni spazio simmetrico è omogeneo. Decomposizione di Cartan di un'algebra di Lie rispetto ad un automorfismo involutivo e relative proprietà. Struttura degli spazi simmetrici Riemanniani. Costruzione di uno spazio simmetrico Riemanniano G/H a partire da un automorfismo involutivo del gruppo G. Formula per la curvatura di uno spazio simmetrico Riemanniano G/H e legame tra il tensore di Ricci e la forma di Killing dell'algebra di Lie di G. Spazi simmetrici di tipo compatto e tipo non compatto: segno delle curvature sezionali nei due casi. Ogni spazio Riemanniano omogeneo con curvature sezionali non positive e Ricci definito negativo è semplicemente connesso (Teorema di Kobayashi). Teorema di Cartan sull'esistenza di isometrie locali tra spazi localmente simmetrici. Versione globale del Teorema di Cartan. Classificazione delle space forms (Teorema di Hopf). Teorema di decomposizione di uno spazio simmetrico.

Curvatura e topologia. Nozione di distanza su una varietà Riemanniana connessa. Proprietà di minimizzazione delle geodetiche. Teorema di Hopf-Rinow. Teorema di Cartan-Hadamard. Teorema di Myers.

Metodi di insegnamento: Lezioni ed esercitazioni frontali

Supporti alla didattica:

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame: Prova orale

Testi di riferimento principali:

1) S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry. Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
2) J.M. Lee: Riemannian manifolds. Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag, New York, 1997.
3) B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, San Diego, 1983.
4) M. Postnikov: Geometry VI. Riemannian geometry. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 91, Springer-Verlag, Berlin, 2001.