Principali informazioni sull'insegnamento		
Denominazione dell'insegnamento	Geometria Riemanniana	
Corso di studio	LM-40 - Matematica	
Anno di corso		
Crediti formativi universitari (CFU) / European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS):		7
SSD	MAT/03 - Geometria	
Lingua di erogazione	Italiano	
Periodo di erogazione	II semestre (28 Febbraio 2022 – 27 Maggio 2022)	
Obbligo di frequenza	Secondo regolamento didattico	

Docente	
Nome e cognome	Giulia Dileo
Indirizzo mail	giulia.dileo@uniba.it
Telefono	+39 080 5442679
Sede	Dipartimento di Matematica, II piano, stanza 35
Sede virtuale	https://www.dm.uniba.it/members/dileo - Teams
Ricevimento (giorni, orari e modalità)	Il ricevimento avviene su appuntamento da concordare per email.

Syllabus	
Obiettivi formativi	Approfondimento della geometria Riemanniana e in particolar modo della geometria Hermitiana e di contatto.
Prerequisiti	Conoscenza della geometria differenziale di base: varietà differenziabili, spazio tangente e spazio cotangente in un punto ad una varietà differenziabile; fibrato tangente. Algebra tensoriale e calcolo tensoriale. Elementi di geometria Riemanniana.
Contenuti di insegnamento (Programma)	**Spazi vettoriali complessi.** Complessificato di uno spazio vettoriale reale e del suo duale. Estensioni C-lineari di applicazioni R-lineari. Strutture complesse su spazi vettoriali reali. Struttura complessa canonica di R^{2n}. Applicazioni C-lineari tra spazi vettoriali complessi. Il gruppo GL(n,C) come sottogruppo di GL(2n,R). Basi concordemente orientate di uno spazio vettoriale complesso. Complessificato di uno spazio vettoriale complesso. Vettori e forme di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme complesse. **Varietà quasi complesse**. Strutture quasi complesse su varietà differenziabili. Riferimenti locali adattati a strutture quasi complesse. Orientabilità di una varietà quasi complessa. C^n come varietà quasi complessa. Campi vettoriali e forme differenziali di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme differenziali complesse. Tensore di Nijenhuis associato ad una struttura quasi complessa. Condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi del tensore di Nijenhuis. **Varietà complesse.** Funzioni olomorfe ed equazioni di Cauchy-Riemann. Varietà complesse. Funzioni olomorfe tra varietà complesse. Esempi: spazio proiettivo

	complesso, S^2, biolomorfismo tra S^2 e CP^1. Struttura quasi complessa canonica su una varietà complessa. Campi vettoriali coordinati e forme duali. Teorema di Newlander-Nirenberg. Operatori differenziali su varietà complesse. Strutture complesse su superfici Riemanniane orientate. Caratterizzazioni di funzioni olomorfe. Campi vettoriali olomorfi e forme olomorfe. Campi vettoriali reali olomorfi. **Varietà quasi Hermitiane.** Prodotto Hermitiano su un C-spazio vettoriale. Prodotto Hermitiano standard su C^n. Matrici Hermitiane. Basi ortonormali e matrici unitarie. Prodotto scalare Hermitiano su uno spazio vettoriale complesso (V,J) e 2-forma fondamentale associata. J-basi ortonormali. Isomorfismo tra U(n) e un sottogruppo di SO(2n). Estensioni C-lineari di un prodotto scalare Hermitiano e della 2-forma fondamentale associata. Varietà quasi Hermitiane. Esistenza di metriche Hermitiane. C^n come varietà quasi Hermitiana. Riferimenti ortonormali locali. Non degeneratezza della 2-forma fondamentale. Connessione di Levi-Civita: derivata covariante della struttura quasi complessa e della 2-forma fondamentale. Tensore di Nijenhuis di una varietà quasi Hermitiana. Alcune classi di varietà quasi Hermitiane. Curvatura sezionale olomorfa per una varietà quasi Hermitiana. **Varietà di Kähler.** Definizione e caratterizzazione di varietà di Kähler. Struttura Kähleriana su S^2 e su superfici Riemanniane orientate. Proprietà della curvatura Riemanniana di una varietà di Kähler. Varietà di Kähler a curvatura sezionale costante. Varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante. Metriche Hermitiane in coordinate complesse. Caratterizzazione delle metriche di Kähler. Funzione potenziale per una metrica di Kähler. Metrica di Bergman sul disco complesso. Metrica di Fubini-Study sullo spazio proiettivo complesso . Teorema di classificazione delle varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante. **Varietà simplettiche.** Esistenza di basi canoniche per una forma bilineare anti-simmetrica. Forme simplettiche su uno spazio vettoriale e spazi vettoriali simplettici. Basi simplettiche. Caratterizzazione delle forme simplettiche. Varietà quasi-simplettiche e simplettiche. Le varietà metriche quasi-Hermitiane come varietà quasi simplettiche. Struttura simplettica standard su R^{2n}. Teorema di Darboux per varietà simplettiche. Teorema di esistenza di una struttura quasi complessa metrica su una varietà simplettica. **Varietà di contatto e varietà quasi contatto.** Elementi di contatto di una varietà. Struttura di contatto su una varietà come distribuzione di elementi di contatto. 1-forme che definiscono localmente e globalmente una struttura di contatto. Dimensione e orientabilità di una varietà munita di una struttura di contatto. Struttura di contatto naturale su R^{2n+1} . (ϕ, ξ, η)-strutture, metriche compatibili, riferimenti ortonormali adattati. Varietà quasi contatto metriche. Strutture quasi contatto normali: definizione e caratterizzazione. Struttura quasi contatto su una ipersuperficie orientabile di una varietà quasi Hermitiana. Deformazioni D-omotetiche. Rango di varietà quasi contatto.

	Alcune classi di varietà quasi contatto metriche. Varietà di contatto metriche, varietà K-contatto, varietà di Sasaki, varietà cosimplettiche, varietà nearly cosimplettiche, varietà quasi Sasaki, varietà β-Kenmotsu: definizioni, caratterizzazioni, proprietà geometriche, e legami con classi di varietà quasi Hermitiane. **Questioni riguardanti la curvatura Riemanniana.** Alcune identità di curvatura per le varietà di contatto metriche. Curvatura ξ-sezionale delle varietà K-contatto. Proprietà del tensore di Ricci per le varietà K-contatto. Caratterizzazione delle varietà di Sasaki tramite la curvatura. Varietà di contatto metriche a curvatura sezionale costante. Condizioni di annullamento della curvatura Riemanniana di una varietà di contatto metrica, varietà di contatto metriche di tipo (κ, μ). Curvatura ϕ-sezionale. La curvatura di una varietà Sasakiana è determinata dalle curvature ϕ-sezionali. Varietà Sasakiane a curvatura ϕ-sezionale costante (Sasakian space forms). Le tre classi di Sasakian space form. Cenni sulle varietà η-Einstein e Sasaki-Einstein.
Testi di riferimento	– Blair D.E.: Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Springer (2010) – Cannas Da Silva, A.: Lectures on Symplectic Geometry, Springer (2008) – Kobayashi, S., Nomizu K.: Foundations of Differential Geometry vol.1, Wiley-Interscience (1996) – Moroianu, Lectures on Kähler geometry. London Mathematical Society Student Texts, 69. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
Note ai testi di riferimento	

Organizzazione della didattica			
Ore			
Totali	Didattica frontale	Pratica (esercitazioni)	Studio individuale
150	*52*	*8*	*90*
CFU/ETCS			
7	*6,5*	*0,5*	

Metodi didattici	Lezioni ed esercitazioni in didattica frontale.

Risultati di apprendimento previsti	
Conoscenza e capacità di comprensione	Acquisizione di risultati di geometria Riemanniana in campi attualmente indagati nella ricerca, che permettano anche la comprensione di testi avanzati e di pubblicazioni recenti.
Conoscenza e capacità di comprensione applicate	Acquisizione di tecniche dimostrative nell'ambito della geometria Hermitiana e di contatto, e conoscenza di esempi fondamentali.

Competenze trasversali	• *Autonomia di giudizio* Capacità di valutare la correttezza dei ragionamenti, sia dal punto di vista formale e logico che dal punto di vista tecnico. Capacità di dimostrare autonomamente almeno piccole proprietà inerenti il programma sviluppato. • *Abilità comunicative* Acquisizione di un linguaggio formale adeguato alla comprensione e presentazione dei risultati della teoria in oggetto. • *Capacità di apprendere in modo autonomo* Affinamento del metodo di studio acquisito nel percorso di studio precedente, ottenuto mediante l'esercizio all'esposizione dei risultati, alla soluzione di problemi, e alla ricerca bibliografica.

Valutazione	
Modalità di verifica dell'apprendimento	Esame orale.
Criteri di valutazione	*Al termine dell'insegnamento saranno valutati:* • *Conoscenza e capacità di comprensione:* conoscenza delle nozioni fondamentali della geometria Hermitiana e di contatto, unitamente alla capacità di dimostrarne le relative proprietà. • *Conoscenza e capacità di comprensione applicate:* capacità di risolvere problemi e illustrare le nozioni acquisite in esempi specifici. • *Autonomia di giudizio*: capacità di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione, e di confrontare dimostrazioni alternative. Capacità di porre quesiti e proporre soluzioni. • *Abilità comunicative*: capacità di esporre teoremi, dimostrazioni, quesiti, attraverso un linguaggio e un formalismo matematico adeguati. • *Capacità di apprendere*: capacità di consultare testi avanzati e articoli scientifici, anche in lingua inglese.
Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	Il voto finale è attribuito in trentesimi. L'esame si intende superato quando il voto è maggiore o uguale a 18/30.
Altro	