

Principali informazioni sull'insegnamento	
Denominazione dell'insegnamento	<b>GEOMETRIA 3 (GEOMETRY 3)</b>
Corso di studio	<i>MATEMATICA</i>
Anno di corso	
Crediti formativi universitari (CFU) / European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS):	8
SSD	<b>MAT/03 Geometria</b>
Lingua di erogazione	<i>ITALIANO</i>
Periodo di erogazione	<i>Anno 2 Semestre 1</i>
Obbligo di frequenza	<i>Frequenza fortemente consigliata</i>

Docente	
Nome e cognome	Lotta Antonio
Indirizzo mail	antonio.lotta@uniba.it
Telefono	0805442656
Sede	<i>Dipartimento di Matematica-Secondo piano, Stanza 7</i>
Sede virtuale	<i>Team "GEOMETRIA 3" su piattaforma Microsoft Teams (codice 6gzd127)</i>
Ricevimento (giorni, orari e modalità)	Su appuntamento (da concordarsi via e-mail)

Syllabus	
<b>Obiettivi formativi</b>	Acquisizione degli elementi basilari della geometria proiettiva, con particolare attenzione alla costruzione di modelli di spazi proiettivi. Conoscenza delle proprietà fondamentali e della classificazione delle iperquadriche, sia dal punto di vista proiettivo che affine, con particolare riferimento al caso delle coniche e delle quadriche.
<b>Prerequisiti</b>	Le conoscenze usualmente acquisite nel primo anno del corso di laurea in matematica. In particolare: algebra lineare, spazi affini ed euclidei, affinità, isometrie.
<b>Contenuti di insegnamento (Programma)</b>	<b>Spazi proiettivi.</b> Spazio proiettivo $P(V)$ associato ad uno spazio vettoriale $V$ . Spazi numerici proiettivi $KP_n$ . Punti proiettivamente indipendenti. Sottospazi; rette, piani, iperpiani. Sottospazio somma e intersezione di sottospazi. Formula di Grassmann proiettiva. Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio. Sistema lineare degli iperpiani contenenti un dato sottospazio. Trasformazioni proiettive di $KP_n$ . Gruppo delle trasformazioni proiettive di $KP_n$ . Punti in posizione generale e relativa caratterizzazione. Teorema di esistenza ed unicità per le trasformazioni proiettive. La nozione di spazio geometrico proiettivo su un campo $K$ . Sistemi coordinati; equazioni del cambiamento di coordinate omogenee. Struttura di spazio geometrico proiettivo indotta su un insieme per trasporto mediante una bigezione. Campo ampliato con l'elemento all'infinito e relativa struttura canonica di retta geometrica proiettiva.

Ampliamento proiettivo  $S(A)$  di uno spazio affine  $A$  con l'aggiunta delle direzioni. Sistemi coordinati ammissibili su  $S(A)$  dedotti da riferimenti affini. Trasformazioni proiettive tra spazi geometrici proiettivi: caratterizzazione, proprietà, equazioni, teorema di esistenza ed unicità. Sottospazi di uno spazio geometrico proiettivo e relative equazioni cartesiane. Le trasformazioni proiettive trasformano sottospazi in sottospazi. Struttura canonica di spazio geometrico proiettivo indotta su un sottospazio. Duale di uno spazio geometrico proiettivo. Sistemi lineari di iperpiani visti come sottospazi dello spazio duale. Esempi: fasci di rette, fasci di piani. Operazioni di proiezione e sezione in un piano proiettivo. Caratterizzazione dei sottospazi proiettivi di  $S(A)$  non contenuti nell'iperpiano all'infinito come ampliamenti  $S(E)$  di sottospazi affini  $E$  di  $A$ . Legame tra le equazioni di un sottospazio affine e quelle del suo ampliamento proiettivo. Estensione canonica di un'affinità ad una trasformazione proiettiva. Isomorfismo canonico tra il gruppo delle affinità ed il gruppo delle proiettività che conservano l'iperpiano all'infinito.

**Geometria proiettiva in una dimensione.** Coordinata proiettiva non omogenea (ascissa proiettiva); casi particolari rilevanti: fasci propri e impropri di rette di un piano, fasci di piani nello spazio, rette proprie di uno spazio affine. L'equazione bilineare di una trasformazione proiettiva tra rette. Birapporto. Quaterne armoniche. Caratterizzazione delle trasformazioni proiettive tra rette come bigezioni che conservano i birapporti. Trasformazioni proiettive che trasformano una quaterna ordinata di punti distinti in un'altra. Proiettività ellittiche, paraboliche, iperboliche. Involuzioni. Punti uniti di una proiettività. Invariante assoluto di una proiettività iperbolica. Esistenza ed unicità della proiettività iperbolica di assegnati punti uniti e assegnato invariante assoluto. L'involuzione circolare su un fascio proprio di rette nell'ampliamento proiettivo di un piano Euclideo.

**Iperquadriche proiettive.** Richiami su forme quadratiche e forme bilineari simmetriche: segnatura, radicale. Iperquadriche di uno spazio geometrico proiettivo di dimensione  $n \geq 1$ . L'insieme delle iperquadriche è uno spazio proiettivo di dimensione  $n(n+3)/2$ . Rango di un'iperquadrica. Immagine di un'iperquadrica mediante una trasformazione proiettiva. Classificazione proiettiva delle iperquadriche nel caso complesso. Dimensione massima di un sottospazio contenuto in una iperquadrica non degenera complessa (solo enunciato). Indice di una iperquadrica di uno spazio proiettivo reale e suo significato geometrico. Teorema di classificazione delle iperquadriche nel caso

	<p>reale. Caso delle coniche e delle quadriche. Definizione di quadrica ellittica e quadrica iperbolica. Intersezione tra un'iperquadrica ed un sottospazio; posizioni reciproche retta-iperquadrica. Punti singolari di un'iperquadrica, radicale. Caratterizzazione delle iperquadriche il cui supporto è un sottospazio proiettivo ovvero delle iperquadriche che coincidono col proprio radicale. Struttura delle iperquadriche degeneri che non coincidono col proprio radicale: conoidi e coni quadrici; esempi in dimensione due e tre. Punti coniugati rispetto a un'iperquadrica. Iperpiano polare di un punto non singolare. La polarità definita da un'iperquadrica non degenera. Discussione dell'intersezione tra una iperquadrica e l'iperpiano polare di un punto. Iperpiani tangenti. Tangenti condotte da un punto ad una conica. Punti ellittici e punti iperbolici di una quadrica reale non degenera e caratterizzazione delle quadriche ellittiche e iperboliche. L'involuzione dei punti coniugati su una retta secante o esterna ad un'iperquadrica. Rette coniugate rispetto ad una conica, involuzione delle rette coniugate passanti per un punto non appartenente alla conica. Nozione di fascio di iperquadriche; descrizione di alcuni tipi notevoli di fasci di coniche (fascio generale, fascio di coniche tangenti, fascio di coniche bitangenti).</p> <p><b>Proprietà affini delle iperquadriche.</b> Nozione di iperquadrica affine. Centro di un'iperquadrica non degenera. Iperquadriche a centro e non a centro. Il centro come centro di simmetria. Definizione di ellisse, iperbole, parabola e relative caratterizzazioni. Definizione di ellissoide, iperboloide e paraboloidi. Diametri di una conica, diametri coniugati. L'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati. Asintoti di un'iperbole. Chiusura proiettiva di un'iperquadrica di uno spazio affine. Corrispondenza biunivoca tra iperquadriche affini e iperquadriche proiettive che non contengono l'iperpiano all'infinito. Criterio di equivalenza affine per le iperquadriche (solo enunciato). Equazioni canoniche delle iperquadriche affini (solo enunciato); caso delle coniche e delle quadriche. Cenno su coni e cilindri.</p> <p><b>Proprietà metriche delle iperquadriche.</b> Ipersfere di uno spazio Euclideo. Iperpiani principali di un'iperquadrica non degenera e relativa caratterizzazione. Assi di una conica e vertici. Equazione di una conica a centro riferita ai propri assi. Equazione di una parabola in un riferimento avente per assi coordinati il suo asse e la polare del vertice. Piani principali di una quadrica, quadriche rotonde. Fuochi di una conica, eccentricità.</p>
Testi di riferimento	

	<p>-M. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G. Monti Bragadin: <i>Lezioni di Geometria analitica e proiettiva</i>, Bollati Boringhieri, 2003.</p> <p>-M. Berger: <i>Geometry II</i>, Universitext, Springer-Verlag, 1987.</p> <p>-E. Casas-Alvero: <i>Analytic Projective Geometry</i>, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), 2014.</p> <p>-E. Sernesi: <i>Geometria 1</i>, Bollati Boringhieri, 1994.</p> <p>-E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini: <i>Geometria proiettiva, problemi risolti e richiami di teoria</i>, Springer-Verlag, Collana Unitext, 2011.</p>
<b>Note ai testi di riferimento</b>	<p>Materiale didattico aggiuntivo (dispense, testi di prove d'esame e esempi di svolgimento), reperibile all'indirizzo <a href="https://www.dm.uniba.it/members/lotta">https://www.dm.uniba.it/members/lotta</a> e sulla piattaforma Microsoft Teams.</p>

<b>Organizzazione della didattica</b>			
<b>Ore</b>			
Totali	Didattica frontale	Pratica (laboratorio, campo, esercitazione, altro)	Studio individuale
70	40	30	130
<b>CFU/ETCS</b>			
8	5	3	

<b>Metodi didattici</b>	<i>Lezioni ed esercitazioni frontali in aula</i>

<b>Risultati di apprendimento previsti</b>	
<b>Conoscenza e capacità di comprensione</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Acquisizione di concetti e metodi geometrici classici esposti sistematicamente utilizzando un linguaggio moderno.</li> </ul>
<b>Conoscenza e capacità di comprensione applicate</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Le conoscenze acquisite hanno un ampio spettro di applicazioni, sia nell'ambito della matematica pura che di altre discipline scientifiche, per esempio in informatica (grafica 3D, design, robotica, computer vision, ecc).</li> </ul>
<b>Competenze trasversali</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Autonomia di giudizio</i></li> <li>○ Capacità di individuare metodiche utili per risolvere nuovi problemi.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Abilità comunicative</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, utili per la risoluzione rigorosa di problemi.</li> </ul> </li> <li>• <i>Capacità di apprendere in modo autonomo</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Acquisizione di un metodo di studio che favorisca l'abilità a collegare concetti esaminati nell'ambito di varie discipline.</li> </ul> </li> </ul>
--	--

<b>Valutazione</b>	
Modalità di verifica dell'apprendimento	<i>Prova scritta e prova orale</i>
Criteri di valutazione	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Conoscenza e capacità di comprensione:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Conoscenza delle nozioni fondamentali di Geometria Proiettiva, dei risultati di base della teoria e delle relative dimostrazioni.</li> </ul> </li> <li>• <i>Conoscenza e capacità di comprensione applicate:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Saper risolvere problemi geometrici su oggetti classici quali rette, piani, fasci di rette e di piani, coniche e quadriche, usando in special modo le relazioni tra geometria affine e proiettiva.</li> </ul> </li> <li>• <i>Autonomia di giudizio:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Capacità di ragionamento critico sugli argomenti sviluppati a lezione, capacità di sviluppare in modo autonomo alcune dimostrazioni.</li> </ul> </li> <li>• <i>Abilità comunicative:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Capacità di esporre concetti e dimostrazioni in modo chiaro, coerente e convincente.</li> </ul> </li> <li>• <i>Capacità di apprendere:</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Competenza nell'impiego del formalismo dell'algebra lineare nell'ambito della Geometria.</li> </ul> </li> </ul>
Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	<p>Il voto finale è attribuito in trentesimi. L'esame si intende superato quando il voto è maggiore o uguale a 18. Per accedere all'orale occorre aver superato la prova scritta. L'esame orale può essere sostenuto in un appello successivo a quello in cui viene superata la prova scritta, se quest'ultima è valutata come pienamente sufficiente, secondo le modalità stabilite dal regolamento approvato dal Consiglio Interclasse di Matematica.</p>
<b>Altro</b>	