Stampare su carta intestata del CdS

| Principali informazioni sull'insegnamento | | |
|---|---|---|
| Denominazione dell'insegnamento | **Analisi Funzionale** | |
| Corso di studio | Matematica | |
| Anno di corso | | |
| Crediti formativi universitari (CFU) / European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS): | | : 7 |
| SSD | MAT/05 | |
| Lingua di erogazione | Italiano | |
| Periodo di erogazione | II Semestre | |
| Obbligo di frequenza | No. La frequenza è facoltativa, ma vivamente consigliata. | |

| **Docente** | |
|---|---|
| Nome e cognome | Fragnelli Genni |
| Indirizzo mail | genni.fragnelli@uniba.it |
| Telefono | +39 080 544 2687 |
| Sede | Bari |
| Sede virtuale | |
| Ricevimento (giorni, orari e modalità) | Su appuntamento via email |

| ***Syllabus*** | |
|---|---|
| **Obiettivi formativi** | Acquisizione degli strumenti di base relativi agli spazi funzionali, a teoremi di rappresentazione, alla teoria degli operatori e dei semigruppi di operatori, con applicazioni ad alcune classi di equazioni a derivate parziali. |
| **Prerequisiti** | Le conoscenze che si acquisiscono nei primi due anni di una laurea della classe L-35, con particolare riferimento all'Analisi Matematica classica in una o più variabili, agli spazi normati, alla topologia generale ed all'algebra lineare. |
| **Contenuti di insegnamento (Programma)** | **1. RICHIAMI SU SPAZI TOPOLOGICI, SPAZI METRICI, SPAZI DI BANACH E SPAZI DI HILBERT**<br>Richiami sulle principali proprietà degli spazi topologici, sugli spazi metrici, sugli spazi di Banach e sugli spazi di Hilbert. Spazi di Baire. Il lemma di Baire, il lemma di Riesz e il teorema di Riesz.<br>**2. SPAZI DI SUCCESSIONI E SPAZI FUNZIONALI**<br>Gli spazi $l^p$ con $1\leq p\leq+\infty$, $c_0$, $c_{00}$. Le funzioni Hölderiane, le funzioni Lipschitziane, lo spazio $W^{1,p}(a,b)$ con $1\leq p\leq+\infty$, $W^{k,p}(a,b)$ con $1\leq p\leq+\infty$ e k numero naturale, $W_0^{1,p}(a,b)$. Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue. Spazi normati strettamente convessi e uniformemente convessi. Prima disuguaglianza di Clarkson. Disuguaglianza di Morawetz. Teorema di Clarkson. Uniforme convessità degli spazi di Hilbert.<br>3. **FUNZIONALI**<br>Funzionali e loro caratterizzazione. Iperpiani associati a funzionali lineari e continui. Lemma di Zorn. Teorema di Hahn-Banach in forma analitica. Conseguenze immediate del Teorema di Hahn Banach. Duale di uno spazio normato. Duale come spazio di Banach. Proprietà dello spazio duale come conseguenze del Teorema di Hahn-Banach. Mappa di dualità e proprietà. Funzionale di Minkowski e proprietà. Teorema di Hahn-Banach prima e seconda forma geometrica. Spazi biduali e spazi riflessivi. Teorema di James. Teorema di Milman-Pettis. Riflessività degli spazi di Hilbert. Esempi di spazi riflessivi. Teorema di rappresentazione di Riesz-Frechet. Teoremi di rappresentazione degli spazi duali di $L^p(\Omega)$, $l^p$ con $1\leq p<+\infty$. Duale di $c_0$. Duale di $L^\infty(\Omega)$ e $l^\infty$.<br>4. **TOPOLOGIA DEBOLE E DEBOLE*** |

| | |
|---|---|
| | Topologia debole in spazi di Banach. Convergenza debole e proprietà. Convergenza debole in spazi di Hilbert. Convergenza debole in spazi di dimensione finita. Insiemi convessi e chiusi nella topologia debole e nella topologia forte. Funzioni semicontinue inferiormente rispetto alla topologia debole. Topologia debole σ* e convergenza debole σ*. Teorema di Banach–Alaoglu–Bourbaki. Teorema di Kakutani. Legami tra spazi riflessivi e topologia debole σ*. Esistenza di minimi per funzioni convesse e semicontinue inferiormente in spazi riflessivi. Riflessività e separabilità. Metrizzabilità della palla nella topologia debole e debole σ* e conseguenze. Teorema di Eberlein-Smulian. Operatori completamente continui. Caratterizzazione della convergenza debole e debole σ* negli spazi $L^p$ e $l^p$. Teorema di Severini Egorov e conseguenze. Forma debole del Teorema di Lebesgue. Proprietà di Radon-Riesz per gli spazi $L^p$ e $l^p$ e conseguenze. Teorema di Schur<br>**5. OPERATORI LINEARI E CONTINUI**<br>Operatori lineari limitati e proprietà. Operatori lineari definiti su spazi normati di dimensione finita. Norma di un operatore. Insieme degli operatori lineari e continui a valori in spazi di Banach. Teorema sulla serie di Neumann Teorema di Banach-Steinhaus o dell'uniforme limitatezza. Conseguenze del Teorema di Banach-Steinhaus. Teorema dell'applicazione aperta e applicazioni. Teorema del grafico chiuso. Operatori lineari illimitati. Operatori chiusi. Operatori aggiunti e proprietà. Proprietà degli operatori di rango chiuso. Operatori di rango finito. Teorema di rappresentazione e proprietà. Operatori approssimabili e proprietà. Insieme risolvente, spettro e spettro puntuale di un operatore. Proprietà dello spettro di un operatore lineare e continuo.<br>**6. OPERATORI COMPATTI**<br>Operatori compatti. Proprietà degli operatori compatti. Problema di approssimazione. Teorema di Schauder. Spettro di un operatore compatto. Operatori di Fredholm. Teorema dell'alternativa di Fredholm. Immersioni compatte in Spazi di Sobolev. Operatori completamente continui e operatori compatti.<br>**7. OPERATORI IN SPAZI DI HILBERT**<br>Basi ortonormali in spazi di Hilbert separabili. Operatori di Hilbert – Schmidt e rappresentazione. Operatori di Hilbert-Schmidt come operatori compatti. Operatori limitati autoaggiunti, monotoni, idempotenti e normali. Caratterizzazione di un operatore autoaggiunto e idempotente. Caratterizzazione di un operatore normale. Invertibilità di un operatore autoaggiunto. Operatori illimitati simmetrici, autoaggiunti e massimali monotoni. Proprietà dello spettro di un operatore autoaggiunto. Spettro di un operatore monotono e autoaggiunto. Basi hilbertiane costituite da autovettori di operatori compatti e autoaggiunti.<br>**8. SEMIGRUPPI, GENERATORI E RISOLVENTI DI OPERATORI**<br>Operatore risolvente e approssimazioni di Yosida. Semigruppi di operatori fortemente continui su uno spazio di Banach, Esempi fondamentali. Disuguaglianza esponenziale ed estremo di crescenza di un semigruppo. Generatore di un semigruppo fortemente continuo e relative proprietà. Esempi fondamentali. Problema di Cauchy astratto e semigruppi di operatori. Teorema di Hille-Yosida in spazi di Banach e in spazi di Hilbert. Il caso autoaggiunto. Regolarità. Equazione del calore. |
| **Testi di riferimento** | H. BREZIS, Analyse fonctionnelle, Theorie et applications, 2e tirage, Masson 1987.<br>H. BREZIS, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.<br>P. CANNARSA – T. D'APRILE, Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale. Springer, 2008.<br>E. DIBENEDETTO, Real Analysis, Birkäuser, 2002.<br>K.J. ENGEL - R. NAGEL, One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer, 2000.<br>G. GILARDI, Analisi 3, McGraw-Hill, Milano 1994. |

| | |
|---|---|
| | G. GILARDI, Analisi Funzionale, McGraw-Hill, Milano 2014<br>J.A. GOLDSTEIN, Semigroups of Operators and Applications, Second Edition, Dover Publications, Inc. New York 2017.<br>P.D. LAX, Functional Analysis, Wiley Interscience, 2002<br>M. MURATORI, F. PUNZO, N. SOAVE, Esercizi svolti di Analisi Reale e Funzionale, I Edizione, Società Editrice Esculapio, Bologna 2021 |
| **Note ai testi di riferimento** | I libri di testo dovrebbero essere integrati con gli appunti presi a lezione. E' sconsigliato utilizzare appunti reperiti da internet. |

| **Organizzazione della didattica** | | | |
|---|---|---|---|
| **Ore** | | | |
| Totali | Didattica frontale | Pratica (laboratorio, campo, esercitazione, altro) | Studio individuale |
| 175 | 52 | 8 | 115 |
| **CFU/ETCS** | | | |
| 7 | 6,5 | 0,5 | |

| **Metodi didattici** | Lezioni frontali ed esercitazioni in aula |
|---|---|
| | |

| **Risultati di apprendimento previsti** | |
|---|---|
| **Conoscenza e capacità di comprensione** | Acquisizione di concetti e risultati fondamentali nell'ambito dello studio degli spazi funzionali e della teoria degli operatori. Acquisizione dei principali strumenti e delle tecniche dimostrative. |
| **Conoscenza e capacità di comprensione applicate** | Le conoscenze teoriche acquisite trovano molte applicazioni in vari campi della matematica, tra cui lo studio di equazioni alle derivate parziali e di modelli da esse governati. |
| **Competenze trasversali** | • *Autonomia di giudizio*<br>Capacità di valutazione della coerenza del ragionamento logico nelle dimostrazioni e capacità di scelta di strumenti matematici adeguati alla complessità dei problemi da risolvere.<br><br>• *Abilità comunicative*<br>Acquisizione delle basi del linguaggio e del formalismo matematico, necessarie sia per la consultazione e la comprensione dei testi che per l'esposizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.<br><br>• *Capacità di apprendere in modo autonomo*<br>Acquisizione di un metodo di studio adeguato che si avvalga sistematicamente della consultazione dei testi e dell'impegno alla risoluzione di esercizi e quesiti connessi ai contenuti del corso |

| **Valutazione** | |
|---|---|
| Modalità di verifica dell'apprendimento | L'esame finale prevede una prova orale che si basa sulla verifica delle conoscenze teoriche dei contenuti del corso. L'esame si ritiene superato se il voto finale è almeno 18/30. |
| Criteri di valutazione | • *Conoscenza e capacità di comprensione:*<br>Verrà valutata l'acquisizione di concetti e risultati fondamentali nell'ambito dello studio degli spazi funzionali e della teoria degli operatori e l'acquisizione dei principali strumenti e delle tecniche dimostrative. |

| | |
|---|---|
| | • *Conoscenza e capacità di comprensione applicate:*<br>Verrà valutata la capacità di applicare le conoscenze teoriche acquisite nelle varie applicazioni.<br><br>• *Autonomia di giudizio*:<br>Verrà valutata la capacità di valutazione della coerenza del ragionamento logico nelle dimostrazioni e la capacità di scelta di strumenti matematici adeguati alla complessità dei problemi da risolvere.<br><br>• *Abilità comunicative:*<br>Verrà valutata l'acquisizione delle basi del linguaggio, del formalismo matematico e della precisione necessarie per l'esposizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.<br><br>• *Capacità di apprendere:*<br>Verrà valutata l'acquisizione di un metodo di studio che si avvalga della consultazione degli appunti presi a lezione, dei testi consigliati e dell'impegno alla risoluzione di esercizi dati a lezione. |
| Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale | Gli studenti devono essere in grado di collegare i vari argomenti riconoscendone le varie conseguenze. |
| **Altro** | |
| | |