Insegnamento di: Istituzioni di Analisi Superiore 2

Classe di laurea: LM-40-Matematica	**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2020/2021	
Denominazione inglese insegnamento: Elements of Advanced Analysis 2	**Tipo di insegnamento:** Obbligatorio	**Anno:** 1	**Semestre:** 2

Tipo attività formativa:	**Ambito disciplinare:**	**Settore scientifico-disciplinare:**	**CFU totali:** 7
b – Attività caratterizzante	Formazione Teorica di base	MAT/05	di cui CFU lezioni: 6 CFU ese/lab/tutor: 1

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 48 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 24
totale ore didattica assistita: 72
totale ore di studio individuale: 103

Lingua di erogazione:	**Obbligo di frequenza:**
Italiano	no

Docente:	**Tel:** 080 544 2721	**Ricevimento studenti:**	**Giorni e ore ricevimento:**
Marcello D’Abbicco	**e-mail:** marcello.dabbicco@uniba.it	Dip. Matematica piano 2, stanza 36	da concordare via e-mail

Conoscenze preliminari:
Le conoscenze che in genere vengono acquisite in una laurea di I livello della classe L–35. In particolare: analisi matematica classica in una e più variabili, topologia generale, algebra lineare, teoria della misura e dell’integrazione di Lebesgue.

Obiettivi formativi:
Acquisizione di strumenti avanzati dell’analisi moderna, fra i quali: trasformata di Fourier, spazi di Banach, convergenza debole, distribuzioni, spazi di Sobolev.

Risultati di apprendimento previsti

Conoscenza e capacità di comprensione:
Acquisizione di concetti fondamentali dell’analisi matematica più avanzata e dell’analisi funzionale. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.

Conoscenza e capacità di comprensione applicate:
Le conoscenze teoriche acquisite si utilizzano in vasta parte della matematica e delle sue applicazioni.

Autonomia di giudizio:
Capacità di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione. Capacità di individuare i giusti strumenti matematici e le giuste tecniche per affrontare problemi matematica complessi.

Abilità comunicative:
Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l’esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l’analisi e la risoluzione dei problemi.

Capacità di apprendere:
Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi e dalla risoluzione di esercizi e quesiti proposti periodicamente durante il corso.

Programma del corso

1. Spazi di Banach e convergenza debole

Teorema di Baire – caratterizzazione della continuità degli operatori lineari – teorema di Banach–Steinhaus – teorema dell'applicazione aperta di Banach – teorema del grafico chiuso – teorema di Hahn–Banach – spazio duale di uno spazio normato – spazi duali degli spazi L^p – spazio biduale – spazi riflessivi – relazioni fra separabilità di uno spazio e separabilità del suo duale – definizione di convergenza debole e di convergenza debole–* – proprietà elementari dei limiti deboli – teorema di Banach-Alaoglu – teoremi di compattezza rispetto alla convergenza debole–* e alla convergenza debole – semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole – cenni sugli spazi uniformemente convessi – convessità e convergenza debole – debole semicontinuità per funzionali convessi – teorema di minimo per funzionali convessi.

2. Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier

Misure in spazi prodotto: i teoremi astratti di Halmos e Hahn Kolmogorov – teorema di Fubini–Tonelli –

prodotto di convoluzione – teorema di Young – supporto della convoluzione – regolarità della convoluzione – successioni approssimanti dell'unità e mollificatori – convergenza in L^p, puntuale e uniforme del prodotto con approssimanti dell'unità – la delta di Dirac come unità del prodotto di convoluzione – lemma fondamentale del calcolo delle variazioni – trasformata di Fourier – teorema di Riemann-Lebesgue – teorema di inversione in L^1 – calcolo della trasformata di Fourier di importanti nuclei di convoluzione – comportamento della trasformata rispetto alla derivazione – la trasformata di Fourier nello spazio di Schwartz – trasformata di Fourier in L^2: il teorema di Plancherel – Teorema di Riesz Thorin (solo enunciato) e disuguaglianza di Haussdorff-Young.

3. Introduzione alle distribuzioni

Lo spazio $D(\Omega)$ – definizione e prime proprietà delle distribuzioni, ordine di una distribuzione – le funzioni localmente L^1 e misure come distribuzioni – derivata distribuzionale – derivata della funzione di Heaviside – P.V. 1/x – teorema di caratterizzazione delle distribuzioni – lemma di Urysohn, partizione dell'unità, supporto di una distribuzione – soluzioni di $xT=0$ – equazioni differenziali per distribuzioni – lo spazio $E(\Omega)$ – teorema di caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto – convoluzione fra funzioni e distribuzioni e fra distribuzioni – il concetto di soluzione fondamentale – caratterizzazione delle distribuzioni a simmetria radiale – soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace – trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate – trasformata di Hilbert e teorema di Riesz-Kolmogorov (solo enunciato) – funzioni a crescita lenta – distribuzioni omogenee e soluzione fondamentale dell'operatore poliarmonico – trasformata di Fourier a simmetria radiale – cenni sulle funzioni di Bessel.

4. Spazi di Sobolev e alcuni problemi variazionali

Completezza, separabilità e riflessività degli spazi di Sobolev – teorema di immersione di $H^s(R^n)$ in $C_0(R^n)$ – densità delle funzioni test – disuguaglianza di Poincaré – spazi di Sobolev su intervalli: immersione continua per le funzioni $W^{1,p}(I)$ in $L^\infty(I)$ – teorema di Ascoli Arzelà e immersione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $C(I)$ – teoremi di immersione continua per gli spazi $W^{m,p}$ (solo enunciati) – cenni su operatori di prolungamento – teoremi di Rellich per spazi $W^{m,p}$ (solo enunciato) – esponenti critici di immersione e condizioni necessarie – disuguaglianza di Poincaré generalizzata – lo spazio $W^{-m,p'}(\Omega)$ come duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$ – alcuni esempi di problemi variazionali ambientati in spazi di Sobolev: problema per $-\Delta$ e $-\Delta + I$ con condizioni di Dirichlet e di Neumann – un problema nonlineare – gli autovalori del laplaciano – Identità di Pohozaev.

5. Problema di Cauchy per equazioni di evoluzione in $\mathbf{R}^n$

Equazione del calore: principio di Duhamel, regolarità della soluzione fondamentale, stime di decadimento in tempo – equazione delle onde: soluzione fondamentale, formula di d'Alembert e velocità di propagazione finita, stime in H^s e regolarità della soluzione, conservazione dell'energia, formula di Kirchoff e metodo della discesa – equazione di Klein-Gordon e conservazione dell'energia – equazione di Schrödinger, regolarità della soluzione e conservazione della massa – equazione della piastra.

Metodi di insegnamento:

Lezioni ed esercitazioni in aula.

Supporti alla didattica:

Appunti del corso disponibili sul sito web personale del docente www.dabbicco.com

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:

Prova scritta e/o orale.

Testi di riferimento principali:

W. RUDIN, Analisi reale e complessa, Boringhieri
H. BREZIS, Analisi funzionale, Liguori
G. GILARDI, Analisi 3, Mc Graw-Hill
S. KESAVAN, Functional Analysis and Applications, J. Wiley & Sons
S. SALSA, Equazioni a derivate parziali, Springer–Verlag Italia

Si vedano, inoltre, gli appunti del corso.