



Vettori di tipo (1,0) e (0,1). Complessificato del duale: forme di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme complesse.

**Varietà quasi complesse.** Strutture quasi complesse su varietà differenziabili. Riferimenti locali adattati a strutture quasi complesse. Orientabilità di una varietà quasi complessa.  $C^n$  come varietà quasi complessa. Campi vettoriali e forme differenziali di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme differenziali complesse. Tensore di Nijenhuis associato ad una struttura quasi complessa. Condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi del tensore di Nijenhuis.

**Varietà complesse.** Funzioni olomorfe ed equazioni di Cauchy-Riemann. Varietà complesse. Funzioni olomorfe tra varietà complesse. Esempi: spazio proiettivo complesso,  $S^2$ , biolomorfismo tra  $S^2$  e  $CP^1$ , gruppi di Lie complessi. Struttura quasi complessa canonica su una varietà complessa. Campi vettoriali coordinati e forme duali. Teorema di Newlander-Nirenberg. Operatori differenziali su varietà complesse. Strutture complesse su superfici Riemanniane orientate. Caratterizzazioni di funzioni olomorfe. Campi vettoriali olomorfi e forme olomorfe. Campi vettoriali reali olomorfi.

**Varietà quasi Hermitiane.** Prodotto Hermitiano su un  $C$ -spazio vettoriale. Prodotto Hermitiano standard su  $C^n$ .

Matrici Hermitiane. Basi ortonormali e matrici unitarie. Prodotto scalare Hermitiano su uno spazio vettoriale complesso ( $V, J$ ) e 2-forma fondamentale associata.  $J$ -basi ortonormali. Isomorfismo tra  $U(n)$  e un sottogruppo di  $SO(2n)$ . Estensioni  $C$ -lineari allo spazio complessificato di un prodotto scalare Hermitiano e della 2-forma fondamentale associata.

Varietà quasi Hermitiane. Esistenza di metriche Hermitiane.  $C^n$  come varietà quasi Hermitiana. Riferimenti ortonormali locali. Non degeneranza della 2-forma fondamentale. Connessione di Levi-Civita: derivata covariante della struttura quasi complessa e della 2-forma fondamentale. Tensore di Nijenhuis di una varietà quasi Hermitiana. Alcune classi di varietà quasi Hermitiane. Curvatura sezionale olomorfa per una varietà quasi Hermitiana.

**Varietà di Kähler.** Definizione e caratterizzazione di varietà di Kähler. Struttura Kähleriana su  $S^2$  e su superfici Riemanniane orientate. Proprietà della curvatura Riemanniana di una varietà di Kähler. Varietà di Kähler a curvatura sezionale costante. Varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante. Metriche Hermitiane in coordinate complesse. Caratterizzazione delle metriche di Kähler. Funzione potenziale per una metrica di Kähler. Metrica di Bergman sul disco complesso. Metrica di Fubini-Study sullo spazio proiettivo complesso. Teorema di classificazione delle varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante.

**Varietà simplettiche.** Esistenza di basi canoniche per una forma bilineare anti-simmetrica.

Forme simplettiche su uno spazio vettoriale e spazi vettoriali simplettici.

Basi simplettiche. Caratterizzazione delle forme simplettiche. Varietà quasi-simplettiche e simplettiche. Le varietà metriche quasi-Hermitiane come varietà quasi simplettiche.

Struttura simplettica standard su  $\mathbf{R}^{2n}$ . Teorema di Darboux per varietà simplettiche.

Teorema di esistenza di una struttura quasi complessa metrica su una varietà simplettica.

**Varietà di quasi contatto e di contatto.** Elementi di contatto di una varietà.

Struttura di contatto su una varietà come distribuzione di elementi di contatto. 1-forme che definiscono localmente e globalmente una struttura di contatto. La dimensione di una varietà munita di una struttura di contatto è dispari come conseguenza della decomposizione degli spazi tangenti. Orientabilità di una varietà munita di una struttura di contatto definita da una 1-forma globale. Struttura di contatto naturale su  $\mathbf{R}^{2n+1}$ .

$(\varphi, \xi, \eta)$ -strutture e proprietà.

Metriche compatibili con una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura e proprietà. Varietà di quasi contatto metriche. Esistenza di metriche compatibili su una varietà paracompatta dotata di una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura. Teorema sull'esistenza di una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura su una varietà di contatto, con dimostrazione tramite il teorema di decomposizione polare. Definizione di normalità di una varietà di quasi contatto  $M$  tramite l'integrabilità di una struttura quasi complessa canonicamente definita su  $M \times \mathbf{R}$ . I campi tensoriali  $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ .

Una varietà di quasi contatto è normale se e solo se  $N^{(1)} = 0$ . Rango di una struttura di quasi-contatto. Una ipersuperficie orientabile di una varietà quasi Hermitiana ammette una struttura di quasi contatto. Deformazioni D-omotetiche. Definizione e rango una di varietà di contatto.

Metriche compatibili e varietà di contatto metriche. Parallelismo del campo vettoriale di Reeb lungo sè stesso rispetto alla connessione di Levi-Civita in una varietà di contatto

metrica e controesempio per una varietà di quasi contatto metrica. Varietà di K-contatto e caratterizzazione.

Definizione di Varietà cosimplettica. Caratterizzazione tramite l'annullamento della derivata covariante della struttura  $\varphi$ . Integrabilità della distribuzione di contatto di una varietà cosimplettica. Analogia tra le varietà cosimplettiche e le varietà di Kähler. Teorema di decomposizione locale delle varietà cosimplettiche. Prodotto di varietà di quasi contatto metriche secondo Morimoto; condizione necessaria e sufficiente perché tale prodotto sia una varietà di Kähler è che i fattori siano varietà cosimplettiche. Definizione varietà nearly-cosymplectic. Il campo di Reeb di una varietà nearly-cosymplectic è di Killing. Definizione di varietà almost-cosymplectic.

Varietà di Sasaki e caratterizzazione.

**Questioni riguardanti la curvatura.** Alcune identità di curvatura per le varietà di contatto metriche. Proprietà della curvatura  $\xi$ -sezionale delle varietà di K-contatto e teorema inverso. Caratterizzazione delle varietà di Sasaki tramite la curvatura. Proprietà del tensore di Ricci per le varietà di K-contatto. Teorema di Olszak sulle varietà metriche di contatto con curvatura sezionale costante. Varietà metriche di contatto tali che la curvatura verifichi l'identità  $R_{XY}\xi = 0$  e teorema di decomposizione locale. Varietà di contatto di tipo  $(\kappa, \mu)$ . La curvatura di una varietà Sasakiana è determinata dalle curvature  $\varphi$ -sezionali. Se la curvatura  $\varphi$ -sezionale non dipende dalla  $\varphi$ -sezione, allora non dipende dal punto. Varietà Sasakiane di curvatura  $\varphi$ -sezionale costante (Sasakian space forms). Le tre classi di Sasakian space form. Cenni sulle varietà  $\eta$ -Einstein e Sasaki-Einstein.

**Varietà quasi-Sasakiane.** Definizione di varietà quasi-Sasakiana e caratterizzazione di Kanemaki tramite un opportuno campo tensoriale di tipo  $(1,1)$ . Campo tensoriale indicatore. Caratterizzazione delle varietà Sasakiane e cosimplettiche tramite il campo tensoriale indicatore. Esempi di una struttura Sasakiana, una cosimplettica una quasi-Sasakiana non Sasakiana né cosimplettica su  $R^5$ .

Definizione di struttura quasi prodotto su uno spazio vettoriale reale  $V$  con proiettori due endomorfismi  $A$  e  $B$ .  $V$  è somma diretta di  $Im(A)$  e  $Im(B)$ . L'endomorfismo  $J=A-B$  verifica la proprietà  $J^2=Id$ . Definizione di varietà almost para-Hermitiane, para-Hermitiane e para-Kähleriane. Teorema di decomposizione locale di varietà quasi-Sasakiane con indicatore parallelo e di rango costante. Definizione di varietà  $\beta$ -Kenmotsu e proprietà. Le foglie delle varietà  $\beta$ -Kenmotsu sono varietà di Kähler. Esempi di varietà  $\beta$ -Kenmotsu ottenuti sul prodotto warped di un intervallo aperto di  $R$  e di una varietà di Kähler.

**Metodi di insegnamento:**  
**Lezioni ed esercitazioni online**

**Supporti alla didattica:** Appunti delle lezioni scaricabili sulla piattaforma Microsoft Teams  
**Testi di riferimento**

**Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:**  
**Prova orale.**

**Testi di riferimento principali:**  
Blair D.E.: Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds - Springer (2010);  
Cannas Da Silva, A.: Lectures on Symplectic Geometry - Springer (2008)  
Kobayashi, S., Nomizu K.: Foundations of Differential Geometry vol.1 – Wiley-Interscience (1996)