Insegnamento di: Analisi Superiore 1		
Classe di laurea: LM - 40 - Matematica	**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2020/2021

Denominazione inglese insegnamento:	**Tipo di insegnamento:**	**Anno:**	**Semestre:**
Advanced course in Mathematical Analysis 1	Obbligatorio	**2**	**1**

Tipo attività formativa:	**Ambito disciplinare:**	**Settore scientifico-disciplinare:**	**CFU totali: 7**
b - Attività caratterizzante	Formazione teorica di base	MAT/05	di cui CFU lezioni: 6,5 CFU ese/lab/tutor: 0,5

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 52 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 8
totale ore didattica assistita: 60
totale ore di studio individuale: 115

Lingua di erogazione:	**Obbligo di frequenza:**	
Italiano	no	

Docente:	**Tel:** +39 080 5442672	**Ricevimento studenti:**	**Giorni e ore ricevimento:**
Francesco Altomare	**e-mail:** francesco.altomare@uniba.it	Dip. Matematica piano 3° , stanza n. 6	Lunedì, 10:00 – 12:00 Martedì, 10:30 – 12:30

Conoscenze preliminari:
Le conoscenze che in genere vengono acquisite con una laurea della classe L-35. In particolare:
analisi matematica classica per funzioni di una o più variabili reali, spazi metrici e spazi di Banach, elementi di topologia generale, teoria astratta della misura e dell'integrazione.

Obiettivi formativi:
Acquisizione di alcuni strumenti di base dell'analisi matematica moderna, con particolare riferimento a spazi topologici compatti e localmente compatti e a spazi di funzioni continue su di essi definiti, a criteri di compattezza in spazi di funzioni continue, a teoremi di densità in spazi di funzioni continue, misure di Borel e misure di Radon su spazi localmente compatti, problemi di approssimazione costruttiva di funzioni in termini di operatori positivi.

Risultati di apprendimento previsti

Conoscenza e capacità di comprensione:
Approfondimento di alcune teorie fondamentali dell' analisi matematica moderna. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.

Conoscenza e capacità di comprensione applicate:
Le conoscenze teoriche acquisite si utilizzano in vasta parte della matematica e delle sue applicazioni.

Autonomia di giudizio:
Capacita di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione. Capacita di individuare i giusti strumenti matematici e le giuste tecniche per affrontare problemi matematica complessi.

Abilità comunicative:
Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l' esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l' analisi e la risoluzione dei problemi.

Capacità di apprendere:
Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi e dalla risoluzione di esercizi e quesiti proposti periodicamente durante il corso.

Programma del corso

1. <u>**RICHIAMI SU SPAZI TOPOLOGICI COMPATTI E LOCALMENTE COMPATTI [4, 7]**</u>

Spazi topologici compatti. Spazi topologici localmente compatti. Compattificazione di Alexandrov. Teoremi di tipo Urysohn. Teoremi di tipo partizione dell'unità. Spazi topologici localmente compatti numerabili all'infinito. Spazi topologici localmente compatti verificanti il secondo assioma di numerabilità. Spazi topologici separabili. Proprietà.

2. SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE [5]

Lo spazio C(X) delle funzioni continue su uno spazio compatto X. Separabilità dello spazio C(X). Funzioni continue su uno spazio localmente compatto a supporto compatto. Funzioni continue convergenti all'infinito. Lo spazio $C_0(X)$ delle funzioni continue che si annullano all'infinito su uno spazio localmente compatto X. Lo spazio $C_*(X)$ delle funzioni continue convergenti all'infinito su uno spazio localmente compatto X. Separabilità degli spazi $C_0(X)$ e $C_*(X)$.

3. TEOREMI DI TIPO ASCOLI-ARZELA' [5]

Insiemi equicontinui di funzioni. Esempi e proprietà. Equicontinuità e convergenza uniforme. Teorema di Ascoli-Arzelà. Applicazioni allo studio di operatori integrali. Teorema di Banach sulla debole compattezza della sfera unitaria del duale di uno spazio di Banach separabile. Applicazioni compatte. Teoremi di tipo Ascoli - Arzelà in C_0 (X) e $C_*(X)$.

4. TEOREMI DI PUNTO FISSO [6, 7]

Teoremi di punto fisso. Il teorema di punto fisso di Brouwer. Applicazioni compatte. Il teorema di punto fisso di Schauder. Applicazioni ad equazioni integrali e a equazioni differenziali ordinarie. Il principio di Leray-Schauder e stime a priori. Applicazioni.

5. TEOREMI DI TIPO STONE-WEIERSTRASS [5]

Teoremi di densità per sottoreticoli e sottoalgebre di C(X,IR) e C(X,C), X compatto. I teoremi classici di Weierstrass (forma algebrica e forma trigonometrica). Applicazioni allo studio delle formule di quadratura. Teoremi di tipo Stone - Weierstrass in C_0(X,IR) e C_0(X,C), X localmente compatto. Applicazioni. Densità del rango della trasformazione di Fourier su $L_1(IR^n)$.

6. OPERATORI POSITIVI SU C_0 (X), FORME LINEARI POSITIVE, MISURE DI RADON [4, 5]

Forme lineari positive ed operatori positivi su $C_0(X)$. Misure di Radon su uno spazio localmente compatto. Misure di Radon a supporto finito. Il duale dello spazio $C_0(X)$.

7. MISURE DI BOREL E MISURE DI BAIRE[3]

Reticoli di Stone. Insiemi *F*-aperti e loro proprietà. Spazi topologici polacchi e spazi topologici normali. Sigma-algebra di Borel e Sigma-algebra di Baire e loro proprietà. Insiemi $C(X, \mathbf{R})$-aperti, $C_b(X, \mathbf{R})$-aperti e $\aleph(X, \mathbf{R})$-aperti. Esempi di misure di Borel e Baire: misure con densità, misure immagine, prodotto di convoluzione. Misure di Baire regolari e loro proprietà. Teorema di Lusin. Teorema di Rappresentazione di Riesz.

Convergenza vaga e sue proprietà. Legame tra convergenza vaga di una successione di distribuzioni di variabile aleatoria e la convergenza in misura delle variabili aleatorie. Convergenza debole e sue proprietà. Legami tra convergenza debole e convergenza vaga. Teorema di Poisson. Convergenza debole e funzioni di distribuzione (Teorema di Helly e Polya). Topologia vaga e topologia debole. Insiemi relativamente vagamente compatti e vagamente compatti. Misure di Baire discrete e loro proprietà di densità.

Trasformata di Fourier di misure: definizioni, esempi e proprietà. Teorema di moltiplicazione. Teorema di Unicità. Differenziabilità della trasformata di Fourier di una misura. Legame tra convergenza debole e trasformata di Fourier di misure. Teorema di Continuità di Paul Lévy. Teorema di Continuità di Paul Lévy (caso generale). Teorema Centrale di convergenza

8. PROCESSI DI APPROSSIMAZIONE POSITIVI SU C_0(X) E TEOREMI DI TIPO KOROVKIN [1, 2]

Teoremi di approssimazione di tipo Korovkin. I due teoremi di Korovkin. Equivalenza fra il teorema di Korovkin, il teorema di Bernstein ed il teorema di Weierstrass. Insiemi di Korovkin. Caratterizzazione degli insiemi di Korovkin in termini di misure di Radon. Esempi ed applicazioni.

Processi di approssimazione in spazi di funzioni continue. Gli operatori di Bernstein, Kantorovitch, Szasz-Mirakjan, Fejèr e Poisson e loro proprietà di approssimazione. Applicazioni: approssimazione di funzioni continue e di funzioni di potenza p-esima sommabile in termini di polinomi, convergenza secondo Cesàro e secondo Abel delle serie di Fourier di funzioni continue e periodiche, il problema classico di Dirichlet sul cerchio.

Metodi di insegnamento:
Lezioni ed esercitazioni in aula.

Supporti alla didattica:

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:
Esame orale

Testi di riferimento principali:

[1] F. ALTOMARE, Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators, Surveys in Approximation Theory, Vol. 5, 2010, 92-164, scaricabile gratuitamente presso http://www.math.technion.ac.il/sat/papers/13/, ISSN 1555-578X.

[2] F. ALTOMARE - M. CAMPITI, Korovkin-type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Series Studies in Mathematics, 17, De Gruyter & Co. Berlin, New York ,1994.

[3] H. BAUER, Measure and Integration Theory, De Gruyter Series Studies in Mathematics, 26, De Gruyter & Co. Berlin, New York, 2001.

[4] G. CHOQUET, Lecture on Analysis, vol. I, W.A. Benjamin Inc., New York, 1969.

[5] G. B. FOLLAND, Real Analysis, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[6] K. GOEBEL, A concise course on fixed point theorems, Yokohama Publishers, 2002.

[7] E. ZEIDLER, Applied Functional Analysis, Vol. 109, Springer – Verlag, Berlin, 1995.