

---

## Programma del corso

**Sommersioni Riemanniane.** Definizione di sommersione. La distribuzione verticale associata a una sommersione. Definizione di sommersione Riemanniana. Campi vettoriali orizzontali, basici. Il sollevamento orizzontale di un campo vettoriale. Esempi di sommersioni: la proiezione di un rivestimento (Riemanniano).

Varietà prodotto warped di due varietà Riemanniane: definizione e calcolo della connessione di Levi-Civita. La proiezione di un prodotto warped sul primo fattore è sommersione Riemanniana. I tensori di O'Neill e i corrispondenti

operatori associati a una sommersione Riemanniana: definizione, proprietà e significato geometrico. Condizioni di integrabilità della distribuzione orizzontale associata ad una sommersione.

La proiezione del fibrato tangente su una varietà differenziabile come esempio di sommersione e la corrispondente distribuzione verticale. La metrica di Sasaki sul fibrato tangente di una varietà Riemanniana, la proiezione del fibrato tangente come esempio di sommersione Riemanniana e i corrispondenti tensori di O'Neill. Legame tra le curvature Riemanniane dello spazio totale, delle fibre e dello spazio base di una sommersione Riemanniana. Espressione esplicita delle curvature sezionali verticali, orizzontali, miste.

**Geodetiche e sommersioni.** Caratterizzazione delle geodetiche (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sullo spazio totale di una sommersione Riemanniana. Una condizione affinchè una geodetica sia orizzontale. Sommersioni di Clairaut: definizione e caratterizzazione (Teorema di Bishop). La proiezione del prodotto warped di due varietà Riemanniane sul primo fattore è una sommersione di Clairaut. Una classe di sommersioni di Clairaut ottenuta a partire da una sommersione Riemanniana con fibre totalmente geodetiche.

**Applicazioni differenziabili di rango costante.** Richiami sulle sottovarietà, cenno alla differenza tra sottovarietà immerse e regolari (embedded). Richiamo sul Teorema dei valori regolari; esempio: il gruppo ortogonale  $O(n)$  è una sottovarieà regolare di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Controimmagine di una sottovarietà regolare mediante una sommersione surgettiva. Struttura locale delle applicazioni differenziabili di rango costante e conseguenze. Esistenza di sezioni locali per una sommersione. Il Lemma di Baire. Ogni applicazione differenziabile di rango costante surgettiva è una sommersione.

**Spazi omogenei.** Azioni differenziabili di gruppi di Lie su varietà. Campi vettoriali fondamentali. Quoziente di una varietà per una relazione di equivalenza regolare: Teorema di Godement. Quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo chiuso. Ogni  $G$ -spazio omogeneo è un coset space a meno di diffeomorfismo  $G$ -equivariante. Le orbite di un'azione sono sottovarietà immerse. Esempi di spazi omogenei: varietà di Grassmann, varietà di Stiefel, varietà bandiera reali. Embedding della grassmanniana dei sottospazi  $k$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^n$  nello spazio delle matrici simmetriche di ordine  $n$ . Completezza dei campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie. Sottogruppi ad un parametro. Definizione dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Esempio: esponenziale di matrici. Il Teorema del sottogruppo chiuso. Differenziabilità e naturalità dell'applicazione esponenziale di un gruppo di Lie. Campi vettoriali fondamentali su una varietà generati da un'azione di un gruppo di Lie.

**Teoria degli spazi omogenei Riemanniani.** Varietà Riemanniane omogenee. Esempi. Rappresentazione di isotropia. Richiamo sull'integrazione su varietà orientate. Ogni rappresentazione di un gruppo di Lie compatto è una rappresentazione ortogonale rispetto ad un opportuno prodotto scalare. Criterio di esistenza di metriche Riemanniane invarianti su uno spazio omogeneo. Teorema di esistenza di metriche bi-invarianti su gruppi di Lie compatti. Spazi omogenei con rappresentazione di isotropia irriducibile. Campi di Killing e loro caratterizzazione. Formula di Nomizu per la curvatura di uno spazio Riemanniano omogeneo riduttivo. Spazi omogenei naturalmente riduttivi e relativa caratterizzazione in termini di geodetiche. Metriche normali, Teorema di Samelson. Metriche invarianti su gruppi di Lie. Geodetiche omogenee. Teorema di esistenza di geodetiche omogenee su varietà che ammettono un gruppo di isometrie transitivo semisemplice (Kowalski-Szenthe). Calcolo esplicito delle geodetiche sulla sfera  $n$ -dimensionale.

**Campi di Killing su varietà Riemanniane compatte.** Teorema di Stokes. Teorema della divergenza. Cenno al Teorema di Myers-Steenrod sul gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana. Dimensione massima del gruppo delle isometrie. Campi di Killing su varietà compatte: Teorema di Bochner. Applicazione al caso omogeneo; ogni varietà Riemanniana connessa, omogenea, compatta, con Ricci semidefinito negativo è un toro piatto. Campi di Killing su varietà compatte a curvatura positiva: Teorema di Berger.

**L'applicazione esponenziale e i campi di Jacobi.** Richiami sulle geodetiche, lemma di riscalamento. L'applicazione esponenziale di una varietà Riemanniana e relative proprietà fondamentali. Ogni isometria locale è determinata dall'immagine di un punto e dal suo differenziale nello stesso punto. Intorni normali, sfere geodetiche. Completezza geodetica degli spazi omogenei Riemanniani. Campi di Jacobi. Legame tra campi di Killing e campi di Jacobi. Teorema di esistenza ed unicità per i campi di Jacobi. Stima della dimensione dell'algebra di Lie dei campi di Killing.

**Spazi simmetrici Riemanniani.** Simmetrie geodetiche. Isometrie involutive con un punto fisso isolato. Definizione di spazio simmetrico Riemanniano. Esempi di spazi simmetrici: spazio Euclideo, sfere, gruppi di Lie dotati di metrica biinvariante, varietà di Grassmann. Ogni spazio simmetrico è omogeneo. Decomposizione di Cartan di un'algebra di Lie rispetto ad un automorfismo involutivo e relative proprietà. Struttura degli spazi simmetrici Riemanniani. Costruzione di uno spazio simmetrico Riemanniano  $G/H$  a partire da un automorfismo involutivo del gruppo  $G$ . Formula per la curvatura di uno spazio simmetrico Riemanniano  $G/H$  e legame tra il tensore di Ricci e la forma di Killing dell'algebra di Lie di  $G$ . Spazi simmetrici di tipo compatto e tipo non compatto: segno delle curvature sezionali nei due casi. Ogni spazio Riemanniano omogeneo con curvature sezionali non positive e Ricci definito negativo è

semplicemente connesso (Teorema di Kobayashi).

**Metodi di insegnamento:** Lezioni ed esercitazioni in aula

**Supporti alla didattica:**

**Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:** Prova orale

**Testi di riferimento principali:**

- 1) M. Falcitelli, S. Ianus, A. M. Pastore: Riemannian submersions and related topics, World Scientific Publishing Co, Inc., River Edge, NJ, 2004.
- 2) S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry. Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- 3) J.M. Lee: Riemannian manifolds. Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag, New York, 1997.
- 4) B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, San Diego, 1983.
- 5) M. Postnikov: Geometry VI. Riemannian geometry. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 91, Springer-Verlag, Berlin, 2001.