Insegnamento di: Geometria Riemanniana

Classe di laurea: Magistrale	**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2019/2020	
Denominazione inglese insegnamento: **Riemannian Geometry**	**Tipo di insegnamento:** **a scelta**	**Anno:** **2017/18**	**Semestre:** **II**

Tipo attività formativa: attività a scelta	**Ambito disciplinare:** ---	**Settore scientifico-disciplinare:** MAT 03	**CFU totali: 7** di cui CFU lezioni: **6,5** CFU ese/lab/tutor: 0,5

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 52 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 8
totale ore didattica assistita: 60
totale ore di studio individuale: 1500

Lingua di erogazione: Italiano	**Obbligo di frequenza:** no	

Docente: **Di Terlizzi Luigia**	**Tel: 080 544 2694** **e-mail:** **luigia.diterlizzi@uniba.it**	**Ricevimento studenti:** **Microsoft Teams**	**Giorni e ore ricevimento:** **su Microsoft Teams per appuntameto**

Conoscenze preliminari: Conoscenza della geometria differenziale di base: varietà differenziabili, spazio tangente e spazio cotangente in un punto ad una varietà differenziabile; fibrato tangente. Algebra tensoriale e calcolo tensoriale. Elementi di Geometria Riemanniana

Obiettivi formativi: Approfondimento della conoscenza della geometria Riemanniana e in particolar modo della Geometria Hermitiana e di contatto.

Risultati di apprendimento previsti

Conoscenza e capacità di comprensione:
Acquisizione di risultati di Geometria Riemanniana in campi attualmente molto indagati nella ricerca, che permettano anche la comprensione di testi avanzati e di pubblicazioni recenti

Conoscenza e capacità di comprensione applicate:
Acquisizione di tecniche dimostrative nell'ambito della Geometria Hermitiana e di contatto e conoscenza di esempi significativi e fondamentali

Autonomia di giudizio:
Capacità di valutare la correttezza dei ragionamenti, sia dal punto di vista formale e logico che dal punto di vista tecnico. Capacità di dimostrare autonomamente almeno piccole proprietà inerenti il programma sviluppato

Abilità comunicative:
Acquisizione di un linguaggio formale adeguato alla comprensione e presentazione dei risultati della teoria in oggetto

Capacità di apprendere:
Affinamento del metodo di studio acquisito nel percorso di studio precedente, ottenuto mediante l'esercizio all'esposizione dei risultati e alla soluzione di problemi.

Programma del corso

Spazi vettoriali complessi. Complessificato di uno spazio vettoriale reale. Estensioni C-lineari di applicazioni R-lineari. Complessificato dello spazio duale. Strutture complesse su spazi vettoriali reali. Struttura complessa canonica di R^{2n}. Applicazioni C-lineari tra spazi vettoriali complessi. Il gruppo GL(n,C) come sottogruppo di GL(2n,R). Basi concordemente orientate di uno spazio vettoriale complesso. Complessificato di uno spazio vettoriale complesso.

Vettori di tipo (1,0) e (0,1). Complessificato del duale: forme di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme complesse.
Varietà quasi complesse. Strutture quasi complesse su varietà differenziabili. Riferimenti locali adattati a strutture quasi complesse. Orientabilità di una varietà quasi complessa. C^n come varietà quasi complessa. Campi vettoriali e forme differenziali di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme differenziali complesse. Tensore di Nijenhuis associato ad una struttura quasi complessa. Condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi del tensore di Nijenhuis.

Varietà complesse. Funzioni olomorfe ed equazioni di Cauchy-Riemann. Varietà complesse. Funzioni olomorfe tra varietà complesse. Esempi: spazio proiettivo complesso, S^2, biolomorfismo tra S^2 e CP^1, gruppi di Lie complessi. Struttura quasi complessa canonica su una varietà complessa. Campi vettoriali coordinati e forme duali. Teorema di Newlander-Nirenberg. Operatori differenziali su varietà complesse. Strutture complesse su superfici Riemanniane orientate. Caratterizzazioni di funzioni olomorfe. Campi vettoriali olomorfi e forme olomorfe. Campi vettoriali reali olomorfi.

Varietà quasi Hermitiane. Prodotto Hermitiano su un C-spazio vettoriale. Prodotto Hermitiano standard su C^n. Matrici Hermitiane. Basi ortonormali e matrici unitarie. Prodotto scalare Hermitiano su uno spazio vettoriale complesso (V,J) e 2-forma fondamentale associata. J-basi ortonormali. Isomorfismo tra U(n) e un sottogruppo di SO(2n). Estensioni C-lineari allo spazio complessificato di un prodotto scalare Hermitiano e della 2-forma fondamentale associata.
Varietà quasi Hermitiane. Esistenza di metriche Hermitiane. C^n come varietà quasi Hermitiana. Riferimenti ortonormali locali. Non degeneratezza della 2-forma fondamentale. Connessione di Levi-Civita: derivata covariante della struttura quasi complessa e della 2-forma fondamentale. Tensore di Nijenhuis di una varietà quasi Hermitiana. Alcune classi di varietà quasi Hermitiane. Curvatura sezionale olomorfa per una varietà quasi Hermitiana.

Varietà di Kähler. Definizione e caratterizzazione di varietà di Kähler. Struttura Kähleriana su S^2 e su superfici Riemanniane orientate. Proprietà della curvatura Riemanniana di una varietà di Kähler. Varietà di Kähler a curvatura sezionale costante. Varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante. Metriche Hermitiane in coordinate complesse. Caratterizzazione delle metriche di Kähler. Funzione potenziale per una metrica di Kähler. Metrica di Bergman sul disco complesso. Metrica di Fubini-Study sullo spazio proiettivo complesso. Teorema di classificazione delle varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante.

Varietà simplettiche. Esistenza di basi canoniche per una forma bilineare anti-simmetrica.
Forme simplettiche su uno spazio vettoriale e spazi vettoriali simplettici.
Basi simplettiche. Caratterizzazione delle forme simplettiche. Varietà quasi-simplettiche e simplettiche. Le varietà metriche quasi-Hermitiane come varietà quasi simplettiche.
Struttura simplettica standard su $\mathbf{R}^{2n}$. Teorema di Darboux per varietà simplettiche.
Teorema di esistenza di una struttura quasi complessa metrica su una varietà simplettica.

Varietà di quasi contatto e di contatto. Elementi di contatto di una varietà.
Struttura di contatto su una varietà come distribuzione di elementi di contatto. 1-forme che definiscono localmente e globalmente una struttura di contatto. La dimensione di una varietà munita di una struttura di contatto è dispari come conseguenza della decomposizione degli spazi tangenti. Orientabilità di una varietà munita di una struttura di contatto definita da una 1-forma globale. Struttura di contatto naturale su $\mathbf{R}^{2n+1}$.
(φ, ξ, η)-strutture e proprietà.
Metriche compatibili con una (φ, ξ, η)-struttura e proprietà. Varietà di quasi contatto metriche. Esistenza di metriche compatibili su una varietà paracompatta dotata di una (φ, ξ, η)-struttura. Teorema sull'esistenza di una (φ, ξ, η)-struttura su una varietà di contatto, con dimostrazione tramite il teorema di decomposizione polare. Definizione di normalità di una varietà di quasi contatto M tramite l'integrabilità di una struttura quasi complessa canonicamente definita su M × R. I campi tensoriali $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$.
Una varietà di quasi contatto è normale se e solo se $N^{(1)} = 0$. Rango di una struttura di quasi-contatto. Una ipersuperficie orientabile di una varietà quasi Hermitiana ammette una struttura di quasi contatto. Deformazioni D-omotetiche. Definizione e rango una di varietà di contatto.
Metriche compatibili e varietà di contatto metriche. Parallelismo del campo vettoriale di Reeb lungo sè stesso rispetto alla connessione di Levi-Civita in una varietà di contatto

metrica e controesempio per una varietà di quasi contatto metrica. Varietà di K-contatto e caratterizzazione.

Definizione di Varietà cosimplettica. Caratterizzazione tramite l'annullamento della derivata covariante della struttura φ. Integrabilità della distribuzione di contatto di una varietà cosimplettica. Analogia tra le varietà cosimplettiche e le varietà di Kähler, Teorema di decomposiizone locale delle varietà cosimplettiche. Prodotto di varietà di quasi contatto metriche secondo Morimoto; condizione necessaria e sufficiente perché tale prodotto sia una varietà di Kahler è che i fattori siano varietà cosimplettiche. Definizione varietà nearly-cosymplectic. Il campo di Reeb di una varietà nearly-cosymplectic è di Killing. Definizione di varietà almost-cosymplectic.

Varietà di Sasaki e caratterizzazione.

Questioni riguardanti la curvatura. Alcune identità di curvatura per le varietà di contatto metriche. Proprietà della curvatura ξ-sezionale delle varietà di K-contatto e teorema inverso. Caratterizzazione delle varietà di Sasaki tramite la curvatura. Proprietà del tensore di Ricci per le varietà di K-contatto. Teorema di Olszak sulle varietà metriche di contatto con curvatura sezionale costante. Varietà metriche di contatto tali che la curvatura verifichi l'identità $R_{XY}\xi = 0$ e teorema di decomposizione locale. Varietà di contatto di tipo (κ, μ). La curvatura di una varietà Sasakiana è determinata dalle curvature φ-sezionali. Se la curvatura φ-sezionale non dipende dalla φ-sezione, allora non dipende dal punto.

Varietà Sasakiane di curvatura φ-sezionale costante (Sasakian space forms). Le tre classi di Sasakian space form.

Cenni sulle varietà η-Einstein e Sasaki-Einstein.

Varietà quasi-Sasakiane. Definizione di varietà quasi-Sakiana e caratterizzazione di Kanemaki tramite un opportuno campo tensoriale di tipo (1,1). Campo tensoriale indicatore. Caratterizzazione delle varietà Sasakiane e cosimplettiche tramite il campo tensoriale indicatore. Esempi di una struttura Sasakiana, una cosimplettica una quasi-Sasakiana non Sasakiana né cosimplettica su R^5 .

Definizione di struttura quasi prodotto su uno spazio vettoriale reale V con proiettori due endomorfismi A e B. V è somma diretta di Im (A) e Im (B). L'endomorfismo J=A-B verifica la proprietà J^2=Id. Definizione di varietà almost para-Hermitiane, para-Hermitiare e para-Kähleriane. Teorema di decomposizione locale di varietà quasi-Sasakiane con indicatore parallelo e di rango costante. Definizione di varietà β-Kenmotsu e proprietà. Le foglie delle varietà β-Kenmotsu sono varietà di Kähler. Esempi di varietà β-Kenmotsu ottenuti sul prodotto warped di un intervallo aperto di R e di una varietà di Kähler.

Metodi di insegnamento:
Lezioni ed esercitazioni online

Supporti alla didattica: Appunti delle lezioni scaricabili sulla piattaforma Microsoft Teams
Testi di riferimento

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:
Prova orale.

Testi di riferimento principali:
Blair D.E.: Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds - Springer (2010);
Cannas Da Silva, A.: Lectures on Symplectic Geometry - Springer (2008)
Kobayashi, S., Nomizu K.: Foundations of Differential Geometry vol.1 – Wiley-Interscience (1996)