# Incontri di Matematica Superiore

a cura di Marco Gallo*

Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

5 novembre 2019

*Gli esercizi di seguito proposti si ispirano a diverse fonti, alcune delle quali sono citate successivamente.*
*L'idea di questa raccolta è quella di mettere in pratica le conoscenze teoriche acquisite negli anni, mettendosi alla prova con esercizi leggermente più lontani da quelli standard - come talvolta sarà già successo durante le lezioni. Non abbiate quindi timore di provarci, di perdere anche più giorni su un singolo esercizio, e di non riuscirci: a volte è solo questione di avere l'idea giusta, che magari potrà venirvi anche a distanza di molto tempo, così come potrebbe venire al vostro compagno di banco e a voi no.*
*Attualmente questa è una piccola raccolta di problemi di Analisi: spero che nel tempo possa essere ampliata e migliorata. Inoltre, spero che altri settori della matematica possano essere coinvolti e sviluppati da diverse mani.*
*Gli esercizi sono stati suddivisi non in ordine crescente di difficoltà, ma in ordine crescente di argomenti necessari per poter comprendere la traccia dell'esercizio. Gli esercizi con «Hint!» prevedono un suggerimento (a fine documento) nel caso in cui ne abbiate bisogno. Le parti «Bonus», invece, sono parti dell'esercizio di cui non ho attualmente la soluzione (ma non per questo sono necessariamente difficili!).*
*Per quanto sia una semplice raccolta, essa non è scevra di possibili errori, che vi prego di segnalarmi. Per il resto, non mi resta che augurarvi... buon divertimento!*

## Indice



*email: marco.gallo@uniba.it; Stanza 21, III piano.

## Fonti


[1] Università degli Studi di Bari, *Prove di ammissione al dottorato (cicli XXI-XXIII)*, `https://www.uniba.it/ricerca/dottorati/raccolta-tracce/temi-dottorato-di-ricerca-fino-a-24-ciclo/view`

[2] INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica), *Prove di ammissione alla borsa di studio triennale*, `https://www.altamatematica.it/prove-anni-precedenti/`

[3] INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica), *Prove di ammissione alla borsa di studio magistrale*, `https://www.altamatematica.it/prove-degli-anni-precedenti-laurea-magistrale/`

[4] Olimpiadi della Matematica, *Giochi di Archimede, Prove nazionali di Cesenatico, etc...*, `http://olimpiadi.dm.unibo.it/le-gare/`

[5] Università della Basilicata e del Salento, *Prove di ammissione al dottorato*, `https://www.matfis.unisalento.it/116#`

[6] SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste), *Prove di ammissione alla magistrale*, `http://www.math.sissa.it/entrance-examinations-master`

[7] SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste), *Prove di ammissione al dottorato*, `http://www.math.sissa.it/entrance-examinations`

[8] E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di analisi matematica 1-2*, Liguori Editore (1993)

[9] A. Bressan, *Lecture Notes on Functional Analysis, with Applications to Linear Partial Differential Equations*, AMS (2012)

[10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Springer (2010)

[11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011)

[12] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Exercises in Analysis - Part 1-2*, Springer (2014-2016)

[13] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I-II-III*, AMS (2000-2001-2003)


Aggiornamenti sulla pagina facebook:
`https://www.facebook.com/groups/IncontriMatematicaSuperiore/`

**Nota:** il seguente eserciziario è stato alla base della serie di incontri dal titolo *Incontri di Matematica Superiore* presso il Dipartimento di Matematica (Bari, 2019), in cui alcuni esercizi sono stati discussi con ragazzi di diversi livelli di preparazione (dal primo anno triennale all'ultimo magistrale). Spero che questa iniziativa di discussione extra-curricolare possa essere ripresa in futuro da terze persone, e quindi riproposta (con nuovi esercizi!). Come già messo in evidenza, sarebbe perfetto se fosse poi anche proposta in altri rami della matematica, non limitandosi quindi alla sola Analisi.


Un sentito e doveroso ringraziamento va quindi ai ragazzi che hanno partecipato attivamente e con entusiasmo a questi incontri.

# 1 Analisi in una variabile ($\sim$ Analisi 1-2)

**Esercizio 1** (Riscaldiamoci!). *Dimostrare che la seguente funzione è decrescente:*

$$g(x) := e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

**Esercizio 2** (Non fatevi ingannare!). *Calcolare*

$$\lim_{a \to 0^+} \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin(t)}{t} e^{at} \mathrm{d}t.$$

**Esercizio 3.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla, definita da*

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i e^{b_i x},$$

*$a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Allora $f$ ha al più $n-1$ zeri. (Hint!)*

**Esercizio 4.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa. Allora*

- *esistono i limiti $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$;*
- *se entrambi i limiti sono finiti, allora $f$ è costante.*

**Esercizio 5.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) = 1$ e*

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

*per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Si verifichi che $f(x) = e^{ax}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, nell'ipotesi $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dimostrare la stessa conclusione ipotizzando solo $f \in C(\mathbb{R})$.*

**Esercizio 6.** *Dimostrare o confutare l'affermazione: «Se $a_n$ è una successione di numeri reali positivi tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, allora $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$». (Hint!)*

**Esercizio 7.** *Si dimostri che:*

- *se tutti gli zeri di un polinomio complesso $p$ stanno nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$, allora la derivata di $p$ non può annullarsi nell'origine.*
- *ogni punto critico di un polinomio complesso $p$ sta nell'inviluppo convesso degli zeri di $p$.*

**Esercizio 8.** *Sia $f \in C^2([0,1])$. Allora $f$ è convessa se e solo se*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

*per ogni $0 \leq a < b \leq 1$.*
*Dimostrare lo stesso risultato ipotizzando $f$ solo continua. (Hint!)*

**Esercizio 9.** *Sia $X := \{u \in C^1([-1,1]) \,:\, u(-1) = 0,\, u(1) = 1\}$ e si consideri $I : X \to [0, +\infty)$ definito da*

$$I(u) := \int_{-1}^{1} (u')^2 (1-u')^2.$$

*Allora $\inf_{u \in X} I(u) = 0$ e tale $\inf$ non è un minimo.*

**Esercizio 10.** *Si consideri $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ tale che $(Tu)(x) := \int_0^{x^2} u(\sqrt{s}) \mathrm{d}s$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione $Tu = \lambda u$. Allora $u \equiv 0$.*

**Esercizio 11.** *Sia $f_n(x) := \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$. Allora $f_n(x) = 0$ non ha radici reali. (Hint!)*

## 2 Analisi in più variabili e spazi metrici ($\sim$ Analisi 3-4)

**Esercizio 12.** *Sia $(X,d)$ completo e $F : X \to X$. Sia $F^{(n)} := F \circ \cdots \circ F$ l'$n$-esima iterata e si assuma*

$$d(F^{(n)}(x), F^{(n)}(y)) \leq \alpha_n d(x,y)$$

*per ogni $x, y \in X$, con $\sum_n \alpha_n < \infty$. Allora esiste un unico punto fisso di $F$.*

**Esercizio 13.** *Sia $B = B_1(0)$. Si trovi una soluzione $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ dell'equazione*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{per } (x,y) \in B \\ u(x,y) = x^2 & \text{per } (x,y) \in \partial B \end{cases}$$

*ove ricordiamo che*

$$\Delta u := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u.$$

**Esercizio 14.** *Sia $(X,d)$ completo e siano $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}, F : X \to \mathbb{R}$ contrazioni con medesima costante $\alpha \in (0,1)$, e con rispettivi punti fissi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x \in X$. Si supponga che $F_n \to F$ puntualmente. Allora $x_n \to x$.*

**Esercizio 15.** *Sia $(X,d)$ compatto e $f : X \to X$ isometria. Allora $f$ è suriettiva. L'implicazione vale anche senza l'ipotesi di compattezza?*

**Esercizio 16.** *Per ogni $f, g \in C([0,1])$ si definisca*

$$d(f,g) := \int_0^1 \min\{1, |f(x) - g(x)|\} \mathrm{d}x.$$

*Allora*

- *$d$ è una distanza;*
- *se $L : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare e continuo rispetto alla topologia indotta da $d$, allora $L \equiv 0$.*

**Esercizio 17.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$ e sia $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ definita da*

$$g(x) := \int_{B(x, |x|/2)} f(y) \mathrm{d}y.$$

*Allora $g$ ha un punto di massimo. (Hint!)*

**Esercizio 18.** *Siano dati $n+1$ punti $P_0 \dots P_n \in \mathbb{R}^n$ che verificano*

$$\sum_{i=1}^{n} |P_i - P_{i-1}| = L > 0,$$

*ove $|\cdot|$ è la norma euclidea, e sia $T$ il poliedro ottenuto come inviluppo convesso di tali punti.*
*Sia $n = 2$: mostrare che esiste una scelta dei punti che massimizza la misura di $T$, e calcolarla.*
*Bonus: risolvere l'esercizio per un $n \in \mathbb{N}$ generico. Calcolare il limite di tale misura per $n \to +\infty$.*

# 3 ODE ($\sim$ Analisi 4 + Metodi numerici per la matematica)

**Esercizio 19.** *Sia $y = y(x)$ l'unica soluzione di*

$$\begin{cases} y' &= \ln(\sqrt{1+y^2}) \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

*Verificare che:*

- *se $y_0 > 0$, allora $y$ è strettamente crescente e convessa; se $y_0 < 0$, allora $y$ è strettamente crescente e concava;*
- *$y$ è definita globalmente.*

**Esercizio 20.** *Si consideri*

$$\begin{cases} y'' &= (y')^2 - 2 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$$

*Allora*

- *la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;*
- $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = -\sqrt{2}$*;*
- $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$*;*

**Esercizio 21.** *Si consideri*

$$\begin{cases} y'' &= -y^3 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$

*Allora*

- *risulta $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui $y$ è definita;*
- *$y$ è definita globalmente;*
- *$y$ è pari;*
- *$y$ è periodica.*

**Esercizio 22.** *Si consideri l'unica soluzione massimale $y : ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$ del problema*

$$\begin{cases} y'(t) &= (\sin(t))^2 - y(t)^2 \\ y(0) &= -1. \end{cases}$$

*Allora $\beta < +\infty$.*

**Esercizio 23.** *Sia $y$ soluzione di*

$$\begin{cases} y' &= \frac{y^2}{1-y^2} \\ y(0) &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Si calcolino*

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} y(x), \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} y'(x).$$

**Esercizio 24.** *Sia* $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *continua tale che* $\omega(0) = 0$ *e* $\omega > 0$ *altrove. Sia* $y : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *funzione* $C^1$ *tale che*

$$\begin{cases} |y'| & \leq & \omega(y) \\ y(0) & = & 0. \end{cases}$$

*Allora*

- *se*
$$\int_0^1 \frac{1}{\omega} = +\infty$$
*allora* $y \equiv 0$*;*
- *se*
$$\omega(y) \leq \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha}$$
*per ogni* $y \in (0,1)$ *e* $\alpha \in (0,1)$*, allora* $y \equiv 0$*. (Hint!)*

**Esercizio 25.** *Si consideri*

$$\begin{cases} y'(t) & = & \frac{t^2}{2+\sin(t^2)}\cos((y(t))^2) \\ y(0) & = & 0. \end{cases}$$

*Allora*

- *esiste un'unica soluzione definita per ogni* $t \in \mathbb{R}$*;*
- $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \sqrt{\pi/2}$.

**Esercizio 26.** *Si consideri l'equazione*

$$-u'' + u = u^3.$$

*Dimostrare che esistono esattamente tre soluzioni in* $C^2(\mathbb{R})$*, pari, tali che*

$$\lim_{|t|\to\infty} u(t) = 0. \tag{3.1}$$

*(Hint!)*

**Esercizio 27.** *Si consideri una soluzione* $y : [0,\alpha] \to \mathbb{R}$ *di*

$$\begin{cases} y'(t) & = & y^2(t) + t \\ y(0) & = & 0. \end{cases}$$

*Allora* $\alpha < 3$*.*

**Esercizio 28.** *Si consideri*

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x(x^2+y^2) - x - y \\ \dot{y} & = & y(x^2+y^2) + x - y. \end{cases}$$

*Per ogni* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *sia* $u(t, P_0) = (x(t), y(t))$ *la soluzione del problema con condizione iniziale* $u(0, P_0) = P_0$*. Discutere, per ogni* $P_0$*, l'intervallo massimale di esistenza di* $u(t, P_0)$ *e se ne disegni un grafico qualitativo.*

# 4 Spazi $L^p$ ($\sim$ Istituzioni di Analisi Superiore 1)

**Esercizio 29.** *Sia $f_n$ limitata in $L^1(0,1)$. Allora*

- $\liminf_n f_n(x) < +\infty$ *quasi ovunque;*
- *trovare una particolare $f_n$ siffatta tale che*

$$\limsup_n f_n(x) = +\infty$$

*quasi ovunque.*

**Esercizio 30.** *Siano $f_k, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabili e siano $g_k(x) := f_k(x^2)$ e $g(x) := f(x^2)$. Allora*

- *se $f_k \to f$ in $L^p(0,1)$ con $p > 2$, allora $g_k \to g$ in $L^1(0,1)$;*
- *vale la stessa conclusione per $p = 2$? (Hint!)*

**Esercizio 31.** *Si dimostrino le seguenti.*

- *Sia $f_n$ limitata in $L^\infty(\mathbb{R})$ con $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$. Allora $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $2 \leq p < \infty$.*
- *Sia $f_n$ limitata in $L^3(\mathbb{R})$, tale che $f_n \to f$ in $L^{3/2}(\mathbb{R})$. Allora $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$.*
- *Più in generale, siano $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$. Sia $f_n \to f$ in $L^{p_1}(\mathbb{R})$ tale che $f_n$ sia limitata in $L^{p_2}(\mathbb{R})$. Allora $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p$ contenuto nell'inviluppo convesso aperto di $\{p_1, p_2\}$. (Hint!)*

**Esercizio 32.** *Si consideri $g_n$ e $g$ in $L^1(0,1)$. Si supponga che*

*a)* $g_n(x) \to g(x)$ *quasi ovunque,*

*b)* $\int_0^1 |g_n| \to \int_0^1 |g|$.

*Allora $\int_0^1 |g_n - g| \to 0$. La conclusione è ancora vera se si sostituisce b) con $\int_0^1 g_n \to \int_0^1 g$?* Osservazione: *l'esercizio può essere visto come corollario dell'Esercizio 33 o dell'Esercizio 34.*

**Esercizio 33.** *Sia $f_n = f_n^+ - f_n^-$ in $L^1(0,1)$ tale che*

- $f_n \to 0$ *quasi ovunque;*
- $\int_0^1 f_n \to 0$.
- $f_n^-$ *è limitata in $L^2(0,1)$;*

*Allora $f_n \to 0$ in $L^1(0,1)$. (Hint!)*

**Esercizio 34.** *Siano $f_k, f \in L^1(0,1)$, $f_k \geq 0$ quasi ovunque. Si assumi che $f_k \to f$ quasi ovunque e che $\int_0^1 f_k \to \int_0^1 f$. Allora si verifichi, nell'ordine, che*

- $\min\{f_k, f\} \to f$ *in $L^1(0,1)$;*
- $\int_0^1 \max\{f_k, f\} + \int_0^1 \min\{f_k, f\} \to 2\int_0^1 f$;
- $\max\{f_k, f\} \to f$ *in $L^1(0,1)$;*
- $f_k \to f$ *in $L^1(0,1)$.*

**Esercizio 35.** *Sia* $K := \{f \in L^2(0,1) : f \geq 0 \ q.o.\}$. *Allora*

- $K$ *è chiuso e convesso;*
- *per ogni* $g \in L^2(0,1)$ *sia* $P_K(g) \in K$ *la proiezione di* $g$ *su* $K$, *cioè l'unico elemento di* $K$ *che minimizza la distanza tra* $g$ *e gli elementi di* $f \in K$, *i.e.*

$$\|g - P_k(g)\|_2 \leq \|g - f\|_2$$

*per ogni* $f \in K$. *Trovare l'espressione esplicita di* $P_K(g)$.

**Esercizio 36.** *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura, e si ponga*

$$\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) < \infty\}.$$

*Supposto esistano* $1 \leq p < q < \infty$ *tali che* $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$, *allora*

$$\sup_{E \in \mathcal{F}} \mu(E) < \infty. \tag{4.1}$$

*(Hint!)*
*Bonus: vale il viceversa. Anzi, è possibile verificare che* (4.1) $\implies$ *a)* $\implies$ *b), ove*

*a) esiste* $A \in \mathcal{F}$ *elemento massimale, cioè tale che* $\mu(A) \geq \mu(E)$ *per ogni* $E \in \mathcal{F}$*;*

*b) per ogni* $1 \leq p \leq q < \infty$ *vale* $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

**Esercizio 37.** *Si risolva l'esercizio 5 nelle ipotesi* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 38.** *Sia* $f \in L^1(0,2)$ *e* $\psi : [0,1] \to [0,1]$ *e* $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(t) := \int_0^1 f(x + \psi(t))\mathrm{d}x.$$

*Allora*

- *se* $\psi$ *è continua, allora* $F$ *è continua;*
- *se* $\psi \in C^1([0,1])$ *con* $\psi' > 0$, *allora* $F$ *è derivabile quasi ovunque.*

**Esercizio 39.** *Sia* $E$ *un sottospazio chiuso di* $L^p(0,1)$ *con* $1 \leq p < \infty$ *tale che* $E \subseteq L^\infty(0,1)$. *Allora*

- $E$ *è completo per entrambe le norme* $\|\cdot\|_p$ *e* $\|\cdot\|_\infty$*;*
- *esiste* $C > 0$ *tale che*

$$\|u\|_\infty \leq C\,\|u\|_p$$

*per ogni* $u \in E$.

# 5 Spazi di Banach e spazi di Hilbert

## 5.1 Operatori lineari e convergenza debole ($\sim$ Istituzioni di Analisi Superiore 2)

**Esercizio 40.** *Sia $(f_n)_n, f$ in $L^2(0,1)$ tale che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^2(0,1)$ e $f_n \to f$ in $L^1(0,1)$. Allora $f_n \to f$ in $L^p(0,1)$ per ogni $p \in [1,2)$.*
*Bonus: vale per $p = 2$?*

**Esercizio 41.** *Siano $X, Y$ normati, $Y$ completo. Sia $T_n$ successione limitata in $\mathcal{L}(X,Y)$ e si definisca*

$$V := \{x \in X \,:\, \exists \lim_n T_n x \in Y\}.$$

*Allora $V$ è un sottospazio chiuso e $T : V \to Y$ definito da*

$$Tx := \lim_n T_n x$$

*è lineare limitato.*
*Bonus: dedurre il lemma di Riemann-Lebesgue nella seguente forma: se $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\tau-$periodica, allora*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(\lambda x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} g \int_{\mathbb{R}} f.$$

**Esercizio 42.** *Sia $T_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito da*

$$(T_k u)(x) := u\left(x + \frac{1}{k}\right).$$

*Verificare che $T_k \overset{*}{\rightharpoonup} Id$, ma $T_k \not\to Id$.*

**Esercizio 43.** *Sia $V$ un sottospazio chiuso di un Hilbert $H$ e $l : V \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Mostrare che esiste un'unica estensione $l$ a tutto $H$ che ne preservi la norma.*
*Trovare un esempio di sottospazio chiuso $W$ di $L^1([0,1])$ e di un funzionale $l : W \to \mathbb{R}$ lineare continuo che ammetta almeno due estensioni a tutto $L^1(0,1)$ che preservano la norma.*

**Esercizio 44.** *Sia $V$ Banach, $X \subseteq V$ debolmente chiuso e $Y \subseteq V$ debolmente compatto, e supponiamo $X$ e $Y$ disgiunti. Allora*

- *$d(X,Y) > 0$;*
- *la conclusione del precedente punto è ancora vera se si suppongono entrambi solo debolmente chiusi?*

**Esercizio 45.** *Siano $X, Y$ spazi di Banach con $X$ riflessivo e $X \hookrightarrow Y$. Sia $(x_n)_n$ successione limitata in $X$, con $x_n \rightharpoonup y$ in $Y$. Allora $y \in X$ e $x_n \rightharpoonup y$ in $X$.*

**Esercizio 46.** *Sia $p \in (1, \infty)$ e $(f_n)_n, f \in L^p(0,1)$. Allora*

- *$f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$ se e solo se $(f_n)_n$ è limitata in $L^p(0,1)$ e*
$$\int_0^x f_n \to \int_0^x f$$
*per ogni $x \in (0,1)$;*
- *la precedente equivalenza rimane vera senza la condizione $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$?*

**Esercizio 47.** *Sia $\psi \in L^2(0,1)$ e sia*

$$K_\psi := \{u \in L^2(0,1) \,:\, u \geq \psi \text{ q.o.}\}.$$

*Allora*

- *il problema di minimo $\min_{u \in K_\psi} \int_0^1 |u|^2$ ammette soluzione $u_\psi$, unica;*
- *si determini esplicitamente tale soluzione $u_\psi$.*

### 5.2 Operatori autoaggiunti, compatti e loro spettri ($\sim$ Analisi Funzionale)

**Esercizio 48.** *Sia $H$ di Hilbert e $T : H \to H$ della forma*

$$Tx = \sum_n (x, a_n) b_n$$

*ove $a_n, b_n \in H$ e*

$$\sum_n |a_n||b_n| < \infty.$$

*Si mostri che $T$ è compatto. (Hint!)*

**Esercizio 49.** *Sia $A : H \to H$ operatore lineare simmetrico su $H$ Hilbert. Allora $A$ è limitato.*

**Esercizio 50.** *Sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definito da*

$$(Tu)(x) := \int_0^x u.$$

*Allora*

- *$T$ è compatto;*
- *trovare lo spettro di $T$.*

**Esercizio 51.** *Sia $T_n : H \to H$ una successione di operatori non nulli, autoaggiunti su un Hilbert $H$ tali che*

$$T_n^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_n, \quad Im(T_n) \subset Im(T_{n+1}), \quad \bigcup_n Im(T_n) = H.$$

*Allora*

- *$T_n$ è limitato per ogni $n$ con $\|T_n\| = 1 + \frac{1}{n}$;*
- *$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} Id$.*

# A Hints

- Esercizio 3: per induzione.
- Esercizio 6: è falsa. Sarebbe vera se si ipotizzasse $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotona decrescente (Teorema di Oliver, 1827). Si cerchi quindi un controesempio non (definitivamente) monotono.
- Esercizio 8: se $f$ è affine, nella relazione vale l'uguaglianza.
- Esercizio 11: per induzione.
- Esercizio 17: si dimostri che $g$ è continua e che $g(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$; da cui la tesi.
- Esercizio 24: per ogni $y \in (0,1)$ si calcoli $\inf_\alpha \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha}$.
- Esercizio 26: dimostrare, nell'ordine, che se $u \in C^2(\mathbb{R})$ è soluzione dell'equazione differenziale, allora:
  - esiste una $C \in \mathbb{R}$ tale che
  $$\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{4}|u(t)|^4 = C$$
  per ogni $t \in \mathbb{R}$;
  - se $u$ soddisfa (3.1), allora $C = 0$;
  - se $u$ è pari e soddisfa (3.1), allora $|u(0)|^2 = 2$ o $u(0) = 0$;
  - la tesi.
- Esercizio 30: no, non vale. Si cerchi una funzione tale che $(f(x))^2$ non abbia lo stesso andamento di $f(x^2)$ (i.e., non polinomiale), eventualmente "tagliandola" nell'estremo (0 o 1) in cui non è rilevante per il controesempio (ma crea problemi).
- Esercizio 31: si verifichi prima la seguente: siano $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ tali che
  $$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$$
  e sia $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$. Allora $f \in L^p$ e vale
  $$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\alpha} \, \|f\|_{p_2}^{1-\alpha}.$$
- Esercizio 33: si verifichi prima che $f_n^- \to 0$ in $L^1(0,1)$; si osservi poi che $f_n^- = \frac{|f_n|-f_n}{2}$.
- Esercizio 36: si verifichi che $L^q(\mu) \hookrightarrow L^p(\mu)$ (cioè che l'operatore di inclusione è lineare e continuo, e quindi lipschitziano) ed utilizzare tale informazione, in particolare la norma operatoriale (cioè la costante di Lipschitz) per stimare il sup.
- Esercizio 48: si dimostri che $T$ è completamente continua (i.e manda successioni debolmente convergenti in fortemente convergenti).

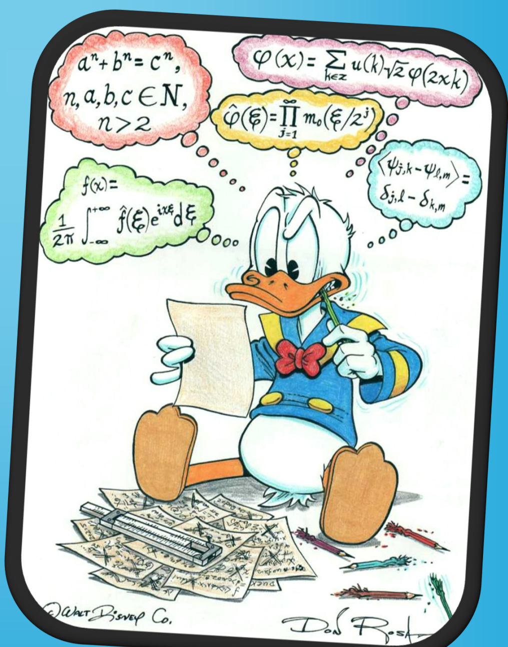
# Incontri di Matematica Superiore

## Incontri di studio interattivo su temi di Matematica, e risoluzione di esercizi “meno standard"

**<u>Programma</u>**

**21 Giugno:** Analisi reale in una variabile
**5 Luglio:** Funzioni in più variabili e spazi metrici
**25 Luglio:** Equazioni differenziali ordinarie
**4 Ottobre:** Spazi $L^p$
***Ulteriori esercizi:*** Spazi di Banach, operatori lineari, convergenza debole

Gli incontri sono organizzati nell'ambito del Tutorato del Dipartimento di Matematica di Bari, e sono rivolti a studenti sia della laurea triennale che della laurea magistrale.




A cura di
Marco Gallo (Peer Tutor):
m.gallo29@studenti.uniba.it

Aggiornamenti (ed esercizi assegnati) sulla pagina:
https://www.facebook.com/groups/IncontriMatematicaSuperiore/

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA