Funzioni definite a tratti: derivabililtà

Marco Gallo*[1]

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

14 settembre 2019

Scopo di queste pagine è quello di capire come verificare la derivabilità di una funzione definita per casi, eventualmente dipendente da uno o più parametri, del tipo

$$f(x) := \begin{cases} g_1(x) & \text{per } x < x_0 \\ y_0 & \text{per } x = x_0 \\ g_2(x) & \text{per } x > x_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

in corrispondenza di $x = x_0$, supposto che g_1 e g_2 siano derivabili lì dove definite.

Il procedimento, mai errato, è quello di applicare la definizione, cioè calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Riferendoci al nostro caso specifico, il limite a sinistra sarà

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{g_1(x) - y_0}{x - x_0}$$

e il limite a destra sarà

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g_2(x) - y_0}{x - x_0}.$$

Bisognerà verificare per quali valori dei parametri questi limiti esistono e sono uguali. Questo metodo, però, potrebbe portare a laboriosi calcoli. C'è una maniera più semplice e breve per risolvere il problema? Facciamo qualche richiamo di teoria, in riferimento a una generica funzione $f : I \to \mathbb{R}$.

Teorema 1 (Teorema del tappabuchi)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, ove $x_0 \in I$. Si supponga esista*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$. Inoltre, f' è continua in x_0.

Dimostrazione. Lasciata come esercizio al lettore. □

Dato questo teorema, allora dalla (0.1) è sufficiente ricavare la derivata per $x \neq x_0$

$$f'(x) = \begin{cases} g_1'(x) & \text{per } x < x_0 \\ g_2'(x) & \text{per } x > x_0 \end{cases} \tag{0.2}$$

*email: m.gallo29@studenti.uniba.it; Stanza: 20, III piano.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO — DIPARTIMENTO DI MATEMATICA e verificare se e quando i limiti a sinistra e a destra esistono e sono uguali, cioè

$$\lim_{x\to x_0^-} g_1'(x) = \lim_{x\to x_0^+} g_2'(x).$$

Dov'è l'inesattezza? L'inesattezza è che le ipotesi del Teorema del tappabuchi sono solo *sufficienti*, ma non *necessarie*. Quindi la nostra funzione potrebbe essere derivabile anche senza verificare le ipotesi del teorema. Infatti - in riferimento all'ultima conclusione del teorema - non tutte le funzioni derivabili hanno derivata prima continua. Un classico esempio è il seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}.$$

Semplici calcoli, lasciati al lettore, ci mostrano che il limite del rapporto incrementale in $x = 0$ è zero, e quindi la derivata esiste (ed è nulla); ma i limiti a sinistra e a destra di 0 della derivata non esistono. Quindi la funzione è derivabile in 0 senza che le ipotesi del Teorema 1 siano soddisfatte.

Quindi, nel caso in cui in un esercizio non si applichino le ipotesi del Teorema del tappabuchi, dovremmo appellarci al rapporto incrementale. In realtà, ci viene (parzialmente) in aiuto il meno noto Teorema di Darboux.

Teorema 2 (Teorema di Darboux)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora $f'(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Lasciata come esercizio al lettore. □

Parafrasando, il teorema afferma che f' verifica il Teorema dei valori intermedi, *anche se non è continua*. La tesi, infatti, sarebbe ovvia se si ipotizzasse $f \in C^1(I)$.

Cosa ci dice quindi questo teorema? Ci dice che f', qualora esista sempre, non può avere salti; cioè le discontinuità di f' non possono essere dettate da limiti a destra e a sinistra esistenti ma diversi (eventualmente infiniti):

Corollario 1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, e supponiamo che f' non sia continua in $x_0 \in I$. Allora uno dei seguenti limiti non esiste*

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

In definitiva, possiamo usare il teorema nel seguente modo: se calcolando i limiti a sinistra e a destra della derivata $f'(x)$ in (0.2), ci accorgiamo che essi **esistono entrambi**, allora possiamo affermare con certezza che f è derivabile in x_0 se e solo se tali limiti sono uguali. Nel caso in cui uno di questi limiti non esista, invece, bisogna ricorrere al rapporto incrementale.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + \sin(x) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ x^2 + \beta(e^x - 1) & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

La funzione è banalmente sempre continua, anche in $x = 0$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha + \cos(x) & \text{per } x < 0 \\ 2x + \beta e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

I limiti a sinistra e destra risultano essere

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha + 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \beta.$$

Dato che i limiti esistono, allora la funzione è derivabile in 0 se e solo se $\alpha + 1 = \beta$.

Esempio 2.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ x^2 + \beta(e^x - 1) & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

La funzione è sempre continua, anche in $x = 0$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x < 0 \\ 2x + \beta e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Il limite a destra esiste sempre; il limite a sinistra, invece, non esiste per nessun valore di α. In questo caso, dobbiamo ricorrere al rapporto incrementale. A destra banalmente abbiamo la derivata:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + \beta(e^x - 1)\right)_{|x=0} = \beta.$$

A sinistra invece abbiamo

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \alpha + \lim_{x \to 0^-} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \alpha.$$

La funzione è quindi derivabile se e solo se $\alpha = \beta$.

Esempio 3.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + (\alpha - 1)x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ x^2 + \beta(e^x - 1) & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

La funzione è sempre continua, anche in $x = 0$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha + (\alpha - 1)\left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{per } x < 0 \\ 2x + \beta e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Il limite a destra esiste sempre; il limite a sinistra, invece, esiste solo per $\alpha = 1$. ***In tale ipotesi*** *otteniamo*

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \overset{\alpha=1}{=} 1, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \beta.$$

Quindi, ***se*** *$\alpha = 1$, la funzione è derivabile se e solo se $\beta = 1$.*

Per $\alpha \neq 1$, invece, il limite sinistro non esiste, e bisogna ricondursi al calcolo del rapporto incrementale. Otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \beta$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \alpha.$$

La funzione sarà quindi derivabile se e solo se $\beta = \alpha$. Osserviamo che quest'ultimo procedimento si applica anche per $\alpha = 1$, includendo il precedente.

Qui alcune fonti con qualche esercizio: Marcellini-Sbordone (pag 255-256), Acerbi-Buttazzo (pag 402-403), Michele-Forti (pag 110-111), e i seguenti link [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. In aggiunta, si possono consultare i libri delle superiori.

Per la stesura di queste pagine di chiarimenti ringrazio il Dottor, amico e collega, Antonio Rastroni per le utili osservazioni.