Esercizi svolti di Geometria 2

a cura di Dario Di Pinto

Università degli Studi di Bari Aldo Moro,
Dipartimento di Matematica

A.A. 2019/2020

Sommario

In questa breve dispensa, frutto dell'attività di tutorato, sono raccolti gli svolgimenti di alcuni esercizi proposti agli studenti del corso di Geometria 2 dalle professoresse Giulia Dileo e Donatella Iacono.

La dispensa è suddivisa in due parti. Nella prima sono presenti esercizi vari che ripercorrono gran parte degli argomenti trattati durante il corso (spazi vettoriali Euclidei, spazi affini, spazi affini Euclidei, affinità e isometrie). La seconda parte, invece, è dedicata esclusivamente a esercizi su affinità e isometrie.

Si tenga presente che gli svolgimenti proposti possono non essere gli unici o i migliori possibili, pertanto si invita lo studente a pensare ad eventuali soluzioni alternative.
Inoltre, benchè corretti dalle docenti, non si esclude la presenza di errori che il lettore è invitato a segnalare all'autore (`dario.dipinto@uniba.it`) o alle docenti (`giulia.dileo@uniba.it`, `donatella.iacono@uniba.it`).

Indice

1 Esercizi vari

1.1 Tracce

1. Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare avente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quale matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x - y, -x + y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Si verifichi che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e se ne determini l'espressione esplicita.

b) Si provi che i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (1, 2, 0)$ sono ortogonali rispetto a g.

c) Si determini il complemento ortogonale di $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ rispetto a g

d) Si determini una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto a g.

e) Stabilire se f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard g_0 di $\mathbb{R}^3$.

f) stabilire se f è autoaggiunto rispetto a g.

2. Nello spazio affine $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Siano $\mathcal{S}$ il sottospazio affine passante per $A(2, 0, 0, 2)$ e di giacitura $U = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ e $\mathcal{T}$ il sottospazio affine passante per $B(0, 1, 1, 1)$ e di giacitura $W = \langle (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

a) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane per $\mathcal{S}$.

b) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane per $\mathcal{T}$.

c) Stabilire se $\mathcal{S} \parallel \mathcal{T}$ e determinare $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ e $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$

3. Nel piano Euclideo $E_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si considerino le rette $r : 2x - y = 0$ e $s : x - y = 0$.

a) Si scriva l'equazione della retta r' simmetrica di r rispetto ad s.

b) Si determini la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente a r in $P(1, 2)$ e avente centro su s.

c) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ e parallele a s.

4. Nel piano Euclideo $E_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si considerino la retta $r : x - y + 1 = 0$ e i punti $A(1, 2)$ e $B(-1, 1)$. Si determinino:

a) la retta r' per B parallela a r e la loro distanza;

b) la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente a r in A e passante per l'origine;

c) la retta t tangente a $\mathcal{C}$ nell'origine.

5. Nello spazio Euclideo $E_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si considerino il piano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ e le rette

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases} .$$

a) Determinare la posizione reciproca tra r e π.

b) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

c) Determinare la distanza tra r e π.

d) Determinare la sfera Σ tangente s in $A(0, 1, 2)$ e tangente l'asse x in $B(1, 0, 0)$.

6. Nello spazio Euclideo $E_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si considerino il piano $\pi : 2x - y = 0$ e le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1. \end{cases} .$$

a) Verificare che r e s sono sghembe e calcolare la retta m di minima distanza tra r e s e la loro minima distanza.

b) Si determini la retta t incidente r, contenuta in π e perpendicolare a s.

c) Si determinino le circonferenze tangenti a r nell'origine, aventi centro su π e raggio 2.

7. Nello spazio Euclideo $E_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si considerino le rette

$$a : \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} , \quad r : \begin{cases} x = 3 \\ y + 2z = 0. \end{cases} .$$

a) Determinare la posizione reciproca tra a e r.

b) Determinare la retta parallela al piano $\pi : x + y + 1 = 0$, passante per $P(1, 3, -1)$ ed incidente la retta r.

c) Determinare l'equazione cartesiana del cilindro circolare retto ottenuto ruotando la retta r attorno all'asse a.

8. Nel piano Euclideo numerico $E_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$ e si consideri l'affinità φ di equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

a) Stabilire se φ è un'isometria e, in caso affermativo, la si classifichi.

b) Determinare i punti uniti di φ.

c) Considerata la retta $r : x + y - 1 = 0$, si scrivano equazioni parametriche e e un'equazione cartesiana di $\varphi(r)$.

1.2 Svolgimenti

1. a) La forma bilineare g è un prodotto scalare se e solo se g è simmetrica e definita positiva.

Poiché A è simmetrica, anche g lo è. Per verificare che g sia definita positiva basta verificare che A lo è, ossia che tutti i minori principali di A sono strettamente positivi:

$$A_1 = 2 > 0; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Dunque, effettivamente, $A_i > 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e quindi g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

L'espressione esplicita di g si ottiene come segue: per ogni $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= u_1^t A u_2 = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \\ &= 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2. \end{aligned}$$

b) $g(v_1, v_2) = v_1^t A v_2 = 2 - 2 = 0$, quindi v_1 e v_2 sono ortogonali rispetto a g.

c) Osserviamo anzitutto che, essendo ortogonali rispetto a g, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di W. Allora:

$$W^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid g(u, v_1) = g(u, v_2) = 0\}.$$

Ora, se $u = (x, y, z)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} g(u, v_1) &= u^t A v_1 = 2x - y - 2z; \\ g(u, v_2) &= u^t A v_2 = y. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 2z = 0, \ y = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = x\} = \\ &= \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1) \rangle . \end{aligned}$$

d) Osserviamo che $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$. Quindi, posto $u = (1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, u è ortogonale a v_1 e v_2 rispetto a g (per definizione di complemento ortogonale) e, per quanto provato al punto (b), v_1 e v_2 sono anche tra loro ortogonali. Pertanto $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a g. Per renderla ortonormale basta normalizzare i vettori:

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{g(v_1, v_1)} = \sqrt{v_1^t A v_1} = 2; \\ \|v_2\| &= \sqrt{g(v_2, v_2)} = \sqrt{v_2^t A v_2} = \sqrt{2}; \\ \|u\| &= \sqrt{g(u, u)} = \sqrt{u^t A u} = 2. \end{aligned}$$

Allora, posto $v_1' := \frac{v_1}{2}$, $v'2 := \frac{v_2}{\sqrt{2}}$ e $u' := \frac{u}{2}$, risulta che $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', u'\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto a g.

<u>**ALTRO MODO:**</u> Se non ci si accorge della possibilità di applicare le osservazioni precedenti, si può ricorrere al procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Consideriamo la base canonica $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e poniamo $w_1 = e_1$.

$$w_2 = e_2 - \frac{g(e_2, w_1)}{g(w_1, w_1)} w_1 = e_2 - \frac{g(e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)} e_1 = e_2 + \frac{1}{2} e_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right);$$

$$w_3 = e_3 - \frac{g(e_3, w_1)}{g(w_1, w_1)} w_1 - \frac{g(e_3, w_2)}{g(w_2, w_2)} w_2 = e_3 = (0, 0, 1).$$

Allora $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a g. Per renderla ortonormale basta normalizzare i vettori:

$$\begin{aligned} \|w_1\| &= \sqrt{g(w_1, w_1)} = \sqrt{g(e_1, e_1)} = \sqrt{2}; \\ \|w_2\| &= \sqrt{g(w_2, w_2)} = \sqrt{w_2^t A w_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \|w_3\| &= \sqrt{g(w_3, w_3)} = \sqrt{g(e_3, e_3)} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Quindi, posto $w_i' = \frac{w_i}{\|w_i\|}$ $(i = 1, 2, 3)$, la base $\mathcal{B}_i' = \{w_1', w_2', w_3'\}$ è ortonormale rispetto a g.

e) Consideriamo la matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$ di $\mathbb{R}^3$, che è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard g_0:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè M è simmetrica, f è autoaggiunto rispetto a g_0.

f) Poichè la base canonica non è ortonormale rispetto a g (ad esempio $g(e_1, e_2) = -1 \neq 0$), per stabilire se f è autoaggiunto rispetto a g occorre stabilire se la matrice AM (e non più M) è simmetrica. Calcoliamo quindi

$$AM = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \dots \\ -2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

AM non è simmetrica e quindi f non è autoaggiunto rispetto a g.

$\square$

2. a) Poniamo $u := (1, 0, 1, 1)$, così che $U = \langle u \rangle$. Per definizione di sottospazio affine, un punto $P(x, y, z, t) \in \mathcal{S}$ se e solo se $\overrightarrow{AP} \in U$, ossia se e solo se

$$\overrightarrow{AP} = \lambda u \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; (x, y, z, t) - (2, 0, 0, 2) = \lambda(1, 0, 1, 1) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \\ t - 2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = 0 \\ z = \lambda \\ t = \lambda + 2 \end{cases}.$$

Queste sono equazioni parametriche di $\mathcal{S}$, dalle quali otteniamo un sistema di equazioni cartesiane:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y = 0 \\ t - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

b) Procediamo in modo analogo per $\mathcal{T}$. Denotiamo con $w_1 := (2, 0, 1, 0)$ e $w_2 := (0, 0, 0, 1)$ i vettori che generano la giacitura W di $\mathcal{T}$ e osserviamo che sono linearmente indipendenti (perché non proporzionali). Quindi $\dim \mathcal{T} = 2$.
Per determinare un sistema di equazioni parametriche per $\mathcal{T}$ applichiamo nuovamente la definizione di sottospazio affine, secondo cui $P(x, y, z, t) \in \mathcal{T}$ se e solo se $\overrightarrow{BP} \in W$, cioè se e solo se

$$\overrightarrow{BP} = \lambda w_1 + \mu w_2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x, y, z, t) - (0, 1, 1, 1) = \lambda(2, 0, 1, 0) + \mu(0, 0, 0, 1) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 2\lambda \\ t - 1 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda + 1 \\ t = \mu + 1 \end{cases}.$$

Queste sono equazioni parametriche di $\mathcal{T}$, dalle quali otteniamo $4-2=2$ equazioni cartesiane:

$$\mathcal{T}: \begin{cases} y = 1 \\ z = x+1 \end{cases} .$$

c) $\mathcal{S} \parallel \mathcal{T}$ se e solo se $U \subset W$, cioè se e solo se u è linearmente dipendente da w_1, w_2. Ma, considerata la matrice associata a u, w_1, w_2 nella base canonica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si vede facilmente che $rg(M) = 3$, dato che il minore ottenuto eliminando la seconda riga è non nullo. Ciò significa che i vettori u, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti, $U \cap W = \{0\}$ e quindi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ <u>non</u> sono paralleli.
Inoltre, dalla seconda equazione di $\mathcal{S}$ $(y=0)$ e dalla prima equazione di $\mathcal{T}$ $(y=1)$ si vede immediatamente che $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$. Dunque $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sghembi.
Infine, applicando l'identità di Grassmann, abbiamo che

$$\dim(\mathcal{S} \vee \mathcal{T}) = \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} + 1 - \dim(U \cap W) = 1 + 2 + 1 + 0 = 4 = \dim \mathcal{A}_4(\mathbb{R}).$$

Dunque $\mathcal{S} \vee \mathcal{T} = \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$. $\square$

3. a) Osserviamo anzitutto che le rette r ed s sono incidenti nell'origine del riferimento $O(0,0)$. Allora, consideriamo il fascio proprio di rette $\mathfrak{F}$ generato da r ed s (ossia il fascio proprio di rette di centro O):

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}: 2x - y + k(x-y) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &\mathfrak{F}: (2+k)x - (1+k)y = 0 \quad (k \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

La retta r' simmetrica di r rispetto ad s appartiene ad $\mathfrak{F}$ e, per determinarla, basta imporre che un arbitrario punto di s sia equidistante da r ed r'. Dunque consideriamo $S(1,1) \in s$ e imponiamo:

$$\begin{aligned} &d(S,r') = d(S,r) \;\Leftrightarrow\; d(S,r')^2 = d(S,r)^2 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; &\frac{[(2+k)-(1+k)]^2}{(2+k)^2+(1+k)^2} = \frac{(2-1)^2}{4+1} = \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2k^2+6k+5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; &2k^2+6k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 0 \vee k = -3. \end{aligned}$$

Per $k=0$ si ottiene r, mentre per $k=-3$ si ottiene la retta $r' : x - 2y = 0$.

ALTRO MODO (I): Considerata una generica retta $r' \in \mathfrak{F}$, essa è simmetrica di r rispetto ad s se e solo se s è bisettrice tra r ed r'. Pertanto basta imporre $\cos(r's) = \cos(rs)$. Ora, considerati i parametri direttori delle tre rette:

$$r \sim (1,2); \quad s \sim (1,1); \quad r' \sim (1+k, 2+k),$$

si ha:

$$\cos(r's) = \cos(rs) \Leftrightarrow \frac{(1+k)1 + (2+k)1}{\sqrt{(1+k)^2 + (2+k)^2}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3+2k)^2}{2k^2+6k+5} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 2k^2 + 6k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = -3.$$

ALTRO MODO (II): Considerato un arbitrario punto $R \in r$ e detto R' il suo simmetrico rispetto ad s, la retta r' cercata è la retta $r' = [O, R']$, essendo O il punto di intersezione tra r ed s.
Scegliamo ad esempio $R = P(1,2)$: la retta passante per P e perpendicolare a s è la retta $s^\perp : x + y - 3 = 0$ e la proiezione di P su s è il punto H:

$$\{H\} = s \cap s^\perp : \begin{cases} y = x \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Determiniamo il simmetrico $R'(x,y)$ di P rispetto a s imponendo che H sia punto medio tra P e R':

$$\frac{3}{2} = \frac{x+1}{2}; \quad \frac{3}{2} = \frac{y+2}{2},$$

da cui segue che $R'(2,1)$. Quindi $r' = [O, R']$ è la retta di equazioni:

$$r' : \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{1-0} \Leftrightarrow r' : x - 2y = 0.$$

b) Sia C il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ che dobbiamo determinare. Poichè $\mathcal{C}$ deve essere tangente in P ad r e deve avere centro su s, C apparterrà all'intersezione tra s e la retta t passante per P e perpendicolare ad r.
Determiniamo t: poichè r ha equazione $r : 2x - y = 0$, una coppia di parametri direttori che individua la direzione perpendicolare ad r (cioè la direzione di t) è $(2, -1)$. Pertanto, imponendo il passaggio per $P(1,2)$, abbiamo che

$$t : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow t : x + 2y - 5 = 0.$$

Dunque

$$C = s \cap t : \begin{cases} y = x \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Il raggio della circonferenza è

$$\rho = d(C,P) = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}}.$$

Quindi la circonferenza cercata ha equazione:

$$\mathcal{C} : \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \iff$$
$$\iff \mathcal{C} : 3x^2 + 3y^2 - 10x - 10y + 15 = 0.$$

c) Le rette parallele ad s hanno tutte equazione del tipo $u : x - y + h = 0$, al variare di $h \in \mathbb{R}$. Per determinare quali di queste sono tangenti a $\mathcal{C}$ basta imporre che la loro distanza dal centro C della circonferenza sia pari al raggio ρ.

$$d(u,C) = \rho \iff d(u,C)^2 = \rho^2 \iff \frac{\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3} + h\right)^2}{2} = \frac{5}{9} \iff h = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Dunque le tangenti cercate sono le rette di equazioni:

$$u_1 : x - y + \frac{\sqrt{10}}{3} = 0 \quad \text{e} \quad u_2 : x - y - \frac{\sqrt{10}}{3} = 0.$$

□

4. a) La generica retta parallela ad r ha equazione $r' : x-y+c = 0$. Imponendo il passaggio per $B(-1,1)$ si ha:

$$-1 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 2.$$

Quindi la retta cercata ha equazione

$$r' : x - y + 2 = 0.$$

Essendo $r \parallel r'$, la distanza tra r e r' è la distanza tra un arbitrario punto P di r e la sua proiezione ortogonale su r' (o viceversa). Dunque consideriamo $P(0,1) \in r$.
La direzione perpendicolare ad r è individuata dal vettore $v = (1,-1)$, da cui segue che la retta perpendicolare a r passante per P ha equazione:

$$r^\perp : \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} \iff r^\perp : x + y - 1 = 0.$$

Allora la proiezione ortogonale di P su r' è il punto H:

$$\{H\} = r^\perp \cap r' : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Allora
$$d(r,r') = d(P,H) = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Sia t la retta perpendicolae ad r passante per $A(1,2)$. Osserviamo che $t \parallel r^{\perp}$, quindi $t : x+y+h=0$: imponendo il passaggio per A otteniamo $h=-3$ e quindi
$$t : x+y-3=0.$$
Il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ che cerchiamo deve appartenere a t, e quindi avrà coordinate del tipo $C(c, 3-c)$. Per determinarlo esattamente imponiamo:
$$\begin{aligned} &d(C,A) = d(C,O) \;\Leftrightarrow\; d(C,A)^2 = d(C,O)^2 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\;\; &(c-1)^2 + (3-c-2)^2 = c^2 + (3-c)^2 \;\Leftrightarrow\; c = \frac{7}{2} \end{aligned}$$
Quindi $C\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e il raggio è $\rho = d(C,O) = \sqrt{\frac{25}{2}}$. Pertanto l'equazione della circonferenza è
$$\mathcal{C} : \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C} : x^2+y^2-7x+y=0.$$

c) La retta tangente a $\mathcal{C}$ in O è la retta passante per O e perpendicolare alla retta $[C,O]$. Ora, i parametri direttori di $[C,O]$ sono $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, o equivalentemente $(7,-1)$. Quindi la tangente t in $\mathcal{C}$ ha equazione:
$$t : 7x - y = 0.$$
□

5. a) Per determinare la posizione reciproca tra r e π, ne studiamo l'intersezione:
$$r \cap \pi : \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \\ -1=0 \text{ !!} \end{cases} .$$
Dunque $r \cap \pi = \emptyset$ e dunque $r \parallel \pi$.

b) Per determinare la proiezione ortogonale di r su π, determiniamo il piano π' contenente r e ortogonale a π. Tale piano dunque appartiene al fascio di piani di asse r, avente equazione
$$\mathfrak{F} : x-y+kz=0.$$

Imponendo la condizione di perpendicolarità tra piani, si ha:

$$\pi' \perp \pi \ \Leftrightarrow \ aa' + bb' + cc' = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 + 1 - k = 0 \ \Leftrightarrow \ k = 2.$$

Dunque $\pi' : x - y + 2z = 0$ e la proiezione ortogonale di r su π è la retta $r' = \pi \cap \pi'$, di equazioni:

$$r' : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} .$$

c) Per determinare la distanza $d(r, \pi)$ è sufficiente calcolare la distaza $d(P, \pi)$, con $P \in r$ arbitrariamente scelto. Allora, considerato $P = O(0, 0, 0)$,

$$d(r, \pi) = d(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Sia α il piano perpendicolare ad s passante per $A(0, 1, 2)$. Calcolando i parametri direttori di s come minori a segno alterno della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

si vede facilmente che essi sono $(0, 1, 1)$. Dunque, dalla condizione di perpenicolarità retta-piano, abbiamo che

$$\alpha : y + z + d = 0,$$

da cui, imponendo il passaggio per A si trova $d = -3$. Dunque

$$\alpha : y + z - 3 = 0.$$

Analogamente consideriamo il piano β perpendicolare perpendicolare all'asse x, passante per $B(1, 0, 0)$: si vede immediatamente che esso ha equazione

$$\beta : x - 1 = 0.$$

Il centro C della sfera Σ appartiene a

$$\alpha \cap \beta : \begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} ,$$

e quindi avrà coordinate del tipo $C(1, c, 3 - c)$. Determiniamo l'esatto valore di c imponendo che

$$d(C, A) = d(C, B) \ \Leftrightarrow \ d(C, A)^2 = d(C, B)^2 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ 1 + (c-1)^2 + (3 - c - 2)^2 = c^2 + (3 - c)^2 \ \Leftrightarrow \ c = 3$$

Dunque $C(1,3,0)$ e il raggio è $\rho = d(C,B) = 3$. Pertanto la sfera cercata ha equazione:

$$\Sigma : (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9.$$

$\square$

6. a) Dalle seconde equazioni di r e s segue immediatamente che $r \cap s = \emptyset$. Inoltre si calcolano facilmente i parametri direttori:

$$r : (2,1,0) \quad s : (0,1,0).$$

Non essendo proporzionali, le rette sono sghembe.
Considerati un generico punto $P(2k,k,0) \in r$ e un generico punto $Q(0,h,1) \in s$, la retta di minima distanza m è la retta $m = [P,Q]$ tale che $m \perp r$ e $m \perp s$. Dunque, poichè i parametri direttori di $m = [P,Q]$ sono

$$m : (2k, k-h, -1),$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} m \perp r \quad &\Leftrightarrow \quad 4k + k - h = 0 \;\Leftrightarrow\; h = 5k \\ m \perp s \quad &\Leftrightarrow \quad k - h = 0 \;\Leftrightarrow\; k = h \end{aligned}$$

Mettendo a sistema queste due condizioni, deduciamo che $h = k = 0$. Quindi $P = 0(0,0,0)$, $Q(0,0,1)$ e m è l'asse z, di equazioni

$$m : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Infine la minima distanza tra r e s è $md(r,s) = d(P,Q) = 1$.

b) Osserviamo che la retta m di minima distanza soddisfa le condizioni richieste e quindi $t = m$.
Supponendo di non essercene accorti, verifichiamolo in altri due modi.

(I) Il punto di intersezione tra r e $\pi : 2x - y = 0$ è l'origine $O(0,0,0)$. Consideriamo, allora, il piano π' perpendicolare a s passante per O. Poichè i parametri direttori di s sono $(0,1,0)$, tale piano ha equazione $\pi' : y = 0$.
Allora, la retta cercata è quella che si ottiene intersecando π e π', cioè

$$t = \pi \cap \pi' : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

(II) Consideriamo il fascio di piani di asse r, $\mathfrak{F} : x - 2y + kz = 0$, e intersechiamolo con il piano π:

$$t_k = \mathfrak{F} \cap \pi : \begin{cases} x - 2y + kz = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} .$$

La retta cercata è ottenuta imponendo che t_k sia perpendicolare a s. Sapendo che i parametri direttori di s sono $(0, 1, 0)$ e quelli di t_k sono $(k, 2k, 3)$, abbiamo:

$$t_k \perp s \;\Leftrightarrow\; 2k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 0.$$

Sostituendo $k = 0$ nelle equazioni di t_k ritroviamo nuovamente l'asse z del riferimento.

c) Il centro C delle circonferenze cercate deve appartenere all'intersezione tra π e il piano σ passante per O e perpendicolare a r. Poichè i parametri direttori di r sono $(2, 1, 0)$, σ ha equazione

$$\sigma : 2x + y = 0.$$

Quindi

$$C \in \pi \cap \sigma : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Dunque $C(0, 0, c)$ e dovendo essere $\rho = 2$, si ha $C(0, 0, \pm 2)$. Dunque le circonferenze cercate appartengono alle sfere

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4, \quad \Sigma_2 : x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 4.$$

Resta da determinare il piano delle circonferenze come il piano contenente r e C. Considerato il fascio di piani di asse r, $\mathfrak{F} : x - 2y + kz = 0$, imponendo il passaggio per $C(0, 0, \pm 2)$ si trova il piano

$$\alpha : x - 2y = 0.$$

In definitiva le circonferenze cercate hanno equazioni:

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} , \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} .$$

□

7. a) Studiamo l'intersezione tra a e r:

$$a \cap r : \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x - 3 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3 = 0 \text{ !!} \\ x = 3 \\ y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Dunque $a \cap r = \emptyset$. Per stabilire se le rette sono parallele o sghembe calcoliamo i parametri direttori come minori a segno alterno delle seguenti matrici:

$$a : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad r : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora si trova che una terna di parametri direttori di a è $(0, 10, -5)$, mentre una terna di parametri direttori di r è $(0, -2, 1)$. Poichè le due terne sono proporzionali, le rette sono parallele: $a \parallel r$.

b) Consideriamo il generico punto $Q(3, -2k, k) \in r$ e la retta $t : [P, Q]$, con $P(1, 3, -1)$. I parametri direttori di t sono $(2, -2k-3, k+1)$ e quindi t è parallela a $\pi : x+y+1 = 0$ se e solo se

$$al + bm + cn = 0 \Leftrightarrow 2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Quindi la retta cercata è la retta $t = [P, Q]$, con $Q(3, 1, -\frac{1}{2})$, che ha equazioni:

$$t : \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+1}{-\frac{1}{2}+1},$$

da cui, si ottiene

$$t : \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

c) Sia $R_k(3, -2k, k) \in r$ generico e determiniamo il piano α_k passante per R_k e perpendicolare all'asse a. Poichè i parametri direttori di a (ossia di r) sono $(0, -2, 1)$, α_k è dato da:

$$\alpha_k : -2(y + 2k) + (z - k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k : 2y - z + 5k = 0.$$

Sia $C = O(0, 0, 0)$ su a, scelto arbitrariamente, e consideriamo la sfera Σ_k di centro C e raggio $\rho_k = d(C, R_k) = \sqrt{9 + 5k^2}$:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + x^2 = 9 + 5k^2.$$

Allora, al variare di $k \in \mathbb{R}$, i paralleli del cilindro circolare retto sono dati da

$$\mathcal{C}_k : \begin{cases} 2y - z + 5k = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 5k^2. \end{cases}.$$

Possiamo ricavare k dalla prima equazione e, sostituendolo nella seconda equazione, eliminiamo il parametro ottenendo l'equazione cartesiana del cilindro circolare retto Γ, ottenuto dalla rotazione di r attorno ad a:

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 5\left(\frac{z-2y}{5}\right)^2 - 9 = 0 \iff$$
$$\iff \Gamma : 5x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz - 45 = 0.$$

$\square$

8. a) La matrice A associata alla parte lineare di φ rispetto a $\mathcal{B}_c$ è data da:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Per la caratterizzazione delle matrici di $\mathbb{O}(2)$, $A \in \mathbb{O}(2)$ è una matrice ortogonale e quindi φ è un'isometria. Inoltre, essendo $\det A = 1$, φ è un'isometria diretta ed essendo $A \neq I_2$, φ non può essere una traslazione; di conseguenza, per il Teorema di Chasles, φ è una rotazione di angolo $\pi/3$.

b) I punti uniti di φ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema di Cramer, la cui unica soluzione è il punto $C\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, centro della rotazione.

c) La retta $r : x + y - 1 = 0$ è la retta di giacitura $W = \langle v \rangle = \langle (1, -1) \rangle$ e passante per il punto $P(1, 0)$. Quindi r ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x - 1 = t \\ y = -t \end{cases} \iff r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \end{cases}.$$

Sostituendo queste ultime nelle equazioni di φ otteniamo un sistema di equazioni parametriche per $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}(t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}(t+1) - \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \varphi(r) : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}t \end{cases},$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana

$$\varphi(r) : 2x - (4 + 2\sqrt{3})y - 1 = 0.$$

$\square$

2 Esercizi su affinità e isometrie

2.1 Tracce

1. Nel piano affine numerico $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Si considerino le due terne di punti

$$P_0(1,2), \qquad P_1(-1,0), \qquad P_2(0,0),$$

$$Q_0(2,1), \qquad Q_1(2,-3), \qquad Q_2(3,-1).$$

a) Verificare che (P_0, P_1, P_2) e (Q_0, Q_1, Q_2) sono terne di punti affinemente indipendenti.

b) Determinare le equazioni dell'affinità $\varphi : \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$.

c) Determinare, se esistono, i punti uniti di φ.

d) Considerata la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$, determinare equazioni parametriche e equazione cartesiana della retta $\varphi(r)$.

e) Determinare le traslazioni di vettori $v, v' \in \mathbb{R}^2$ e la centroaffinità ψ di centro $P_o(1,2)$ tali che

$$\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_{v'}.$$

2. Nel piano Euclideo numerico $E_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Per ciascuna delle seguenti affinità, si stabilisca se è una isometria e, in caso positivo, si stabilisca se si tratta di traslazione, rotazione, riflessione o glissoriflessione. Nel caso di rotazione, se ne determinino centro e angolo di rotazione. Nel caso di riflessione, si determini la retta di punti uniti.

a) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = y + 5 \\ y' = x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

3. Nel piano Euclideo numerico $E_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$.

Si considerino il punto $P_o(-1,0)$ e il vettore $w = (1,3)$.

Siano t_w la traslazione di vettore w, e σ_r la riflessione rispetto alla retta r passante per P_o e di giacitura generata da w. Si determinino le equazioni della glissoriflessione $t_w \circ \sigma_r$.

4. Nello spazio affine numerico $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Si considerino le due quaterne di punti

$$P_0(1,0,0), \qquad P_1(1,0,1), \qquad P_2(0,0,-1), \qquad P_3(0,1,0)$$

$$Q_0(1,0,0), \qquad Q_1(0,0,-1), \qquad Q_2(1,0,1), \qquad Q_3(1,2,1).$$

a) Verificare che (P_0, P_1, P_2, P_3) e (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) sono quaterne di punti affinemente indipendenti.

b) Determinare le equazioni dell'affinità $\varphi : \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$.

c) Determinare, se esistono, i punti uniti di φ.

d) Considerata la retta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$, determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $\varphi(r)$.

e) Determinare le traslazioni di vettori $v, v' \in \mathbb{R}^2$ e la centroaffinità di centro $P_2(0,0,-1)$ tali che

$$\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_{v'}.$$

5. Nello spazio Euclideo numerico $E_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Si consideri l'affinità φ di equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}y - z) \\ z' = \frac{1}{2}(y + \sqrt{3}z) \end{cases}.$$

Verificare che φ è una rotazione di $E_3(\mathbb{R})$. Se ne determinino asse e angolo di rotazione.

6. Nello spazio Euclideo numerico $E_3(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$. Si determinino le equazioni della riflessione rispetto al piano $\alpha : x + 2y = 0$.

7. Uno degli esercizi precedenti contiene un errore nella traccia. Trovarlo!

2.2 Svolgimenti

1. a) Per verificare che (P_0, P_1, P_2) è una terna di punti affinemente indipendenti occorre verificare che i vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$ sono linearmente indipendenti.

$$u_1 := \overrightarrow{P_0P_1} = (-1,0) - (1,2) = (-2,-2);$$
$$u_2 := \overrightarrow{P_0P_2} = (0,0) - (1,2) = (-1,-2).$$

Allora, poiché $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti e quindi P_0, P_1, P_2 sono affinemente indipendenti.
Procediamo analogamente per la terna (Q_0, Q_1, Q_2):

$$w_1 := \overrightarrow{Q_0Q_1} = (2,-3) - (2,1) = (0,-4);$$
$$w_2 := \overrightarrow{Q_0Q_2} = (3,-1) - (2,1) = (1,-2).$$

Poiché w_1 e w_2 non sono proporzionali, essi sono linearmente indipendenti e quindi Q_0, Q_1, Q_2 sono affinemente indipendenti.

b) In virtù di quanto provato al punto (a), dalla teoria sappiamo che esiste un'unica affinità $\varphi : \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0,1,2$.
Detta L la parte lineare di φ, $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è l'automorfismo tale che $L(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ (ossia $L(u_i) = w_i$) per ogni $i = 1,2$, cioè tale che

$$L(-2,-2) = (0,-4), \quad L(-1,-2) = (1,-2).$$

Volendo determinare le equazioni di φ nel riferimento $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$, occorre determinare la matrice di L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. Occorre quindi determinare $L(e_1)$ e $L(e_2)$. A tal fine esprimiamo e_1 ed e_2 come combinazione lineare di u_1 e u_2.

$$(1,0) = e_1 = \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda(-2,-2) + \mu(-1,-2) = (-2\lambda - \mu, -2\lambda - 2\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda - \mu = 1 \\ -2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad e_1 = -u_1 + u_2.$$

$$(0,1) = e_2 = \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda(-2,-2) + \mu(-1,-2) = (-2\lambda - \mu, -2\lambda - 2\mu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda - \mu = 0 \\ -2\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad e_2 = \frac{1}{2}u_1 - u_2.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} L(e_1) &= L(-u_1+u_2) = -L(u_1)+L(u_2) = -w_1+w_2 = -(0,-4)+(1,-2) = \\ &= (1,2) = 1e_1+2e_2; \\ L(e_2) &= L(\frac{1}{2}u_1-u_2) = \frac{1}{2}L(u_1)-L(u_2) = \frac{1}{2}w_1-w_2 = \frac{1}{2}(0,-4)-(1,-2) = \\ &= (-1,0) = -1e_1+0e_2. \end{aligned}$$

Allora la matrice di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(L) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e le equazioni di φ sono

$$\varphi : \begin{cases} x' = x - y + b_1 \\ y' = 2x + b_2 \end{cases} .$$

Infine, per determinare b_1 e b_2 imponiamo che $\varphi(P_2) = Q_2$, cioè

$$\begin{cases} 3 = b_1 \\ -1 = b_2 \end{cases} .$$

In definitiva, le equazioni di φ sono:

$$\varphi : \begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = 2x - 1 \end{cases} .$$

c) Per determinare i punti uniti di $\varphi : X' = AX + b$ basta imporre $X' = X$ e quindi risolvere il sistema

$$\varphi : \begin{cases} x = x - y + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{y+1}{2} = 2 \end{cases} .$$

Dunque φ ammette il punto $F(2,3)$ come unico punto unito.

d) Avendo a disposizione un sistema di equazioni parametriche di r, sostituendole nelle equazioni di φ otteniamo equazioni parametriche per $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) : \begin{cases} x = (1+t) - (3-t) + 3 \\ y = 2(1+t) - 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \varphi(r) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 1. \end{cases} .$$

Sottraendo membro a membro deduciamo che $\varphi(r)$ ha equazione cartesiana

$$\varphi(r) : x - y = 0.$$

ALTRO MODO (I): Dalle equazioni parametriche di $r: \begin{cases} x-1=t \\ y-3=-t \end{cases}$ deduciamo che r è la retta passante per il punto $P(1,3)$ e di giacitura generata da $u=(1,-1)$.
Allora $\varphi(r)$ è la retta passante per $\varphi(P)$ a di giacitura generata da $L(u)$.
Ora, dalle equazioni di φ si ricava $\varphi(P)(1,1)$, mentre

$$L(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque una coppia di parametri direttori di $\varphi(r)$ è $(2,2)$ o equivalentemente $(1,1)$.
Allora $\varphi(r)$ ha equazioni parametriche e cartesiane:

$$\varphi(r): \begin{cases} x-1=t \\ y-1=t \end{cases} \Rightarrow \varphi(r): x-y=0.$$

ALTRO MODO (II): Consideriamo due punti di r, ad esempio $P(1,3)$ e $Q(2,2)$, ottenuti sostituendo rispettivamente $t=0$ e $t=1$ nelle equazioni parametriche di r.
Quindi $r=[P,Q]$ e $\varphi(r)=[\varphi(P),\varphi(Q)]$.
Dalle equazioni di φ ricaviamo $\varphi(P)(1,1)$ e $\varphi(Q)(3,3)$ e quindi $\varphi(r)$ ha equazione cartesiana:

$$\varphi(r): \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow \varphi(r): x-y=0.$$

Infine un sistema di equazioni parametriche per $\varphi(r)$ è $\varphi(r): \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$.

e) Osserviamo anzitutto che φ non è nè una traslazione ($A \neq I_2$), nè una centroaffinità di centro $P_0(1,2)$ (in quanto l'unico punto unito di φ è $F \neq P_0$, o anche perché $\varphi(P_0) = Q_0 \neq P_0$).
Dalla teoria sappiamo che $v = \overrightarrow{P_0\varphi(P_0)}$, $v' = -\overrightarrow{P_0\varphi^{-1}(P_0)}$ e ψ è la centroaffinità di centro P_0, avente la stessa parte lineare di φ.
Quindi:

$$v = \overrightarrow{P_0\varphi(P_0)} = \overrightarrow{P_0Q_0} = (2,1)-(1,2) = (1,-1) \quad \text{e}$$

$$t_v: \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-1 \end{cases}.$$

Per determinare $\varphi^{-1}(P_0)$ basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = x-y+3 \\ 2 = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(P_0)\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Dunque

$$v' = -\overrightarrow{P_0\varphi^{-1}(P_0)} = -\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) + (1,2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$t_{v'} : \begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y - \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Infine, poichè ψ ha la stessa parte lineare di φ, si ha che

$$\psi : \begin{cases} x' = x - y + c_1 \\ y' = 2x + c_2 \end{cases} ,$$

da cui, imponendo che $\psi(P_0) = P_0$ si determinano $c_1 = 2$ e $c_2 = 0$. Quindi

$$\psi : \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = 2x \end{cases} .$$

□

2. Prima di procedere con la risoluzione dell'esercizio, ricordiamo che un'affinità φ di $E_2(\mathbb{R})$ di equazione $X' = AX + b$ è un'isometria se e solo se la matrice A è ortogonale, cioè se e solo se $A \in \mathbb{O}(2)$. Inoltre, per la caratterizzazione delle matrici di $\mathbb{O}(2)$, queste sono tutte e sole le matrici della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ,$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$.
Nel primo caso $\det A = 1$ e l'isometria è diretta, mentre nel secondo caso $\det A = -1$ e l'isometria è inversa.

NOTA: A tal proposito ricordiamo anche che la condizione $\det A = \pm 1$ è necessaria (ma non sufficiente) affinché A sia una matrice ortogonale.

Infine schematizziamo l'enunciato del Teorema di Chasles, che fornisce un criterio molto semplice per classificare le isometrie di $E_2(\mathbb{R})$.

	Diretta ($\det A = 1$)	Inversa ($\det A = -1$)
$Fix(\varphi) \neq \emptyset$	Rotazione	Riflessione risp. a una retta
$Fix(\varphi) = \emptyset$	Traslazione	Glissoriflessione

Ciò detto, risolviamo l'esercizio.

a) La matrice dell'affinità φ è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } \theta = \frac{7}{4}\pi.$$

Quindi $A \in \mathbb{O}(2)$ e $\det A = 1$. Pertanto φ è un'isometria diretta e poichè $A \neq I_2$, φ non può essere una traslazione. Segue che φ è una *rotazione* di angolo $\theta = \frac{7}{4}\pi$.
Il centro della rotazione è l'unico punto unito di φ, che si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}y + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \\ -\sqrt{2}x + (\sqrt{2}-2)y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Svolgendo i calcoli (usando ad esempio il metodo di Cramer) si verifica che l'unica soluzione del sistema è il punto $C(1,1)$.

b) La matrice dell'affinità φ è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e osserviamo subito che $\det A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq \pm 1$. Quindi $A \notin \mathbb{O}(2)$ e φ NON è un'isometria.

c) La matrice dell'affinità φ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi $A \in \mathbb{O}(2)$ e poichè $\det A = -1$, φ è un'isometria inversa. Per stabilire se si tratta di una riflessione o di una glissoriflessione, studiamo i punti uniti di φ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ 0 = 2 \ !! \end{cases}.$$

Dunque il sistema non ammette soluzioni, ossia φ non ammette punti uniti. Dunque $Fix(\varphi) = \emptyset$ e φ è una *glissoriflessione*.

d) In tal caso la matrice di φ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det A = 0$. Quindi, poichè $A \notin GL(2, \mathbb{R})$, le equazioni di φ non rappresentano un'affinità (e quindi a maggior ragione un'isometria), contrariamente a quanto affermato nella traccia. È questo l'errore che risponde all'Esercizio 7.

e) La matrice dell'affinità φ è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{con } \theta = \frac{7}{4}\pi.$$

Quindi $A \in \mathbb{O}(2)$ e $\det A = -1$. Dunque φ è un'isometria inversa e il vettore dei termini noti è $b = 0$, l'origine è un punto unito. Pertanto $Fix(\varphi) \neq \emptyset$ e φ è una *riflessione rispetto a una retta* r. Tale retta è proprio il luogo dei punti uniti di φ che determiniamo risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-2)x - \sqrt{2}y = 0 \\ -\sqrt{2}x - (\sqrt{2}+2)y = 0. \end{cases}$$

Poichè le due equazioni sono dipendenti (la matrice del sistema ha determinante nullo), l'equazione di $r = Fix(\varphi)$ è

$$r = (\sqrt{2}-2)x - \sqrt{2}y = 0.$$

$\square$

3. Consideriamo il punto $P_0(-1,0)$, il vettore $w = (1,3)$ e la retta $r(P_0, \langle w \rangle)$.
Possiamo subito dire che la equazioni della traslazione t_w sono:

$$t_w : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} .$$

Per determinare la riflessione σ_r, ricordiamo che la sua parte linerare è l'automorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L(u) = -u, \quad L(w) = w,$$

essendo $u = (-3,1)$ il vettore dei parametri direttori della direzione normale ad r.
Ora, poichè $\mathcal{B} = \{u, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, la matrice di L rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M := M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$ di $\mathbb{R}^2$, calcoliamo la matrice di passaggio da $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$ e la sua inversa (matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$):

$$N := M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad N^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}(id) = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$A = NMN^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\sigma_r : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y)+b_1 \\ y' = \frac{1}{5}(3x+4y)+b_2. \end{cases}$$

Da qui, imponendo che $\sigma_r(P_0) = P_0$ (perchè $P \in r$ e r è retta di punti uniti), si trovano $b_1 = -\frac{9}{5}$ e $b_2 = \frac{3}{5}$. Dunque le equazioni della riflessione σ_r sono:

$$\sigma_r : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y-9) \\ y' = \frac{1}{5}(3x+4y+3) \end{cases} .$$

Possiamo infine calcolare le equazioni di della glissoriflessione $\varphi = t_w \circ \sigma_r$. Se $P(x,y)$ è un generico punto di $E_2(\mathbb{R})$ e $\varphi(P)(x',y')$, usando le equazioni di σ_r e t_w, abbiamo quanto segue:

$$\begin{aligned} (x',y') &= \varphi(P) = (t_w \circ \sigma_r)(P) = t_w(\sigma_r(P)) = \\ &= t_w\left(\frac{1}{5}(-4x+3y-9), \frac{1}{5}(3x+4y+3)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{5}(-4x+3y-9)+1, \frac{1}{5}(3x+4y+3)+3\right) = \\ &= \left(\frac{1}{5}(-4x+3y-4), \frac{1}{5}(3x+4y+18)\right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\varphi : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-4x+3y-4) \\ y' = \frac{1}{5}(3x+4y+18) \end{cases} .$$

$\square$

4. Lo svolgimento di questo esercizio è quasi del tutto analogo a quello dell'Esercizio 1.

a) Consideriamo i vettori

$$\begin{aligned} u_1 &:= \overrightarrow{P_0P_1} = (1,0,1)-(1,0,0) = (0,0,1); \\ u_2 &:= \overrightarrow{P_0P_2} = (0,0,-1)-(1,0,0) = (-1,0,-1); \\ u_3 &:= \overrightarrow{P_0P_3} = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0). \end{aligned}$$

Allora, poiché $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti e quindi P_0, P_1, P_2, P_3 sono affinemente indipendenti.

Analogamente:

$$\begin{aligned} w_1 &:= \overrightarrow{Q_0Q_1} = (0,0,-1)-(1,0,0) = (-1,0,-1); \\ w_2 &:= \overrightarrow{Q_0Q_2} = (1,0,1)-(1,0,0) = (0,0,1); \\ w_3 &:= \overrightarrow{Q_0Q_3} = (1,2,1)-(1,0,0) = (0,2,1). \end{aligned}$$

Allora, poiché $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti e quindi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sono affinemente indipendenti.

b) Per determinare le equazioni dell'unica affinità $\varphi : \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$, procediamo in modo diverso da quello visto nell'Esercizio 1 (che tuttavia risulta comunque valido).
Sia L la parte lineare di φ, cioè l'unico automorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $L(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{Q_0Q_i}$ (ossia $L(u_i) = w_i$) per ogni $i = 1, 2, 3$, cioè tale che

$$L(0,0,1) = (-1,0,-1), \quad L(-1,0,-1) = (0,0,1), \quad L(-1,1,0) = (0,2,1).$$

La matrice di L rispetto alla base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e alla base canonica $\mathcal{B}_c$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$M = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre la matrice di passaggio da $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$ è

$$N = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e la sua inversa, cioè la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$, è

$$N^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}(id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice associata ad L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$ è la matrice

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(L) = MN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui deduciamo che le equazioni di φ sono:

$$\begin{cases} x' = x + y - z + b_1 \\ y' = 2y + b_2 \\ z' = y - z + b_3 \end{cases}.$$

Infine, imponendo $\varphi(P_0) = Q_0$ si ha:

$$\begin{cases} 1 = 1 + b_1 \\ 0 = b_2 \\ 0 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases} .$$

Dunque le equazioni di φ sono:

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y \\ z' = y - z \end{cases} .$$

c) Determiniamo i punti uniti di φ risolvendo il sistema

$$Fix(\varphi) : \begin{cases} x = x + y - z \\ y = 2y \\ z = y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Dunque il luogo dei punti uniti di φ è la retta di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, cioè l'asse x del riferimento $\mathcal{R}(O, \mathcal{B}_c)$.

d) Sostituendo le equazioni parametriche di r nelle equazioni di φ, otteniamo un sistema di equazioni parametriche per $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) : \begin{cases} x = (1 - t) + 2t - 1 \\ y = 2(2t) \\ z = 2t - 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi(r) : \begin{cases} x = t \\ y = 4t \\ z = 2t - 1 \end{cases} .$$

Da qui deduciamo che $\varphi(r)$ ha equazioni cartesiane $\varphi(r) : \begin{cases} y = 4x \\ z = 2x - 1 \end{cases}$.

NOTA: Anche in questo caso, per determinare equazioni parametriche e cartesiane di $\varphi(r)$, si può procedere usando gli altri due modi illustrati nell'Esercizio 1.

e) Osserviamo anzitutto che φ non è nè una traslazione ($A \neq I_2$), nè una centroaffinità di centro $P_2(0, 0, -1)$ (in quanto $\varphi(P_2) = Q_2 \neq P_2$ o anche perché $P_2 \notin Fix(\varphi)$ essendo $z = -1 \neq 0$).
Dalla teoria sappiamo che $v = \overrightarrow{P_2\varphi(P_2)}$, $v' = -\overrightarrow{P_2\varphi^{-1}(P_2)}$ e ψ è la centroaffinità di

centro P_2, avente la stessa parte lineare di φ.
Quindi:

$$v = \overrightarrow{P_2\varphi(P_2)} = \overrightarrow{P_2Q_2} = (1,0,1) - (0,0,-1) = (1,0,2) \quad \text{e}$$

$$t_v : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \\ z' = z + 2 \end{cases} .$$

Per determinare $\varphi^{-1}(P_2)$ basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = x + y - z \\ 0 = 2y \\ -1 = y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi^{-1}(P_2)(1,0,1) = \varphi(P_2).$$

Dunque

$$v' = -\overrightarrow{P_2\varphi^{-1}(P_2)} = -\overrightarrow{P_2\varphi(P_2)} = -v \quad \text{e}$$

$$t_{v'} : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \\ z' = z - 2 \end{cases} .$$

Infine, poichè ψ ha la stessa parte lineare di φ, si ha che

$$\psi : \begin{cases} x' = x + y - z + c_1 \\ y' = 2y + c_2 \\ z' = y - z + c_3 \end{cases} ,$$

da cui, imponendo che $\psi(P_2) = P_2$ si determinano $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ e $c_3 = -2$. Quindi

$$\psi : \begin{cases} x' = x + y - x - 1 \\ y' = 2x \\ z' = y - z - 2 \end{cases} .$$

$\square$

5. Il sistema di equazioni di φ è della forma $X' = AX + b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo anzitutto che φ sia una isometria verificando che $A \in \mathbb{O}(3)$, cioè che

$$AA^t = I_3 = A^t A.$$

In questo caso, data la particolare struttura della matrice A, possiamo effettuare questo controllo senza calcolare esplicitamente i prodotti matriciali. Osserviamo, infatti, che A può essere scritta in forma diagonale a bolcchi come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

con $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \in \mathbb{O}(2)$. Dunque, poichè B verifica la condizione $BB^t = I_2 = B^t B$, effettuando il prodotto tra matrici a blocchi, si ha:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & BB^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = I_3.$$

In modo analogo, usando $B^t B = I_2$, si prova che $A^t A = I_3$.
Dunque $A \in \mathbb{O}(3)$ e φ è un'isometria. Inoltre, poichè $\det A = \det B = 1$, φ è un'isometria diretta.
Calcoliamo i punti uniti di φ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}y - z) \\ z = \frac{1}{2}(y + \sqrt{3}z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}-2)y - z = 0 \\ y + (\sqrt{3}-2)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

L'ultima equivalenza segue dal fatto che il penultimo sistema è omogeneo e il determinante della matrice del sistema è $\begin{vmatrix} \sqrt{3}-2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-2 \end{vmatrix} = 8 - 4\sqrt{3} \neq 0$. Quindi il sistema ha la soluzione nulla come unica soluzione.
Dunque, essendo $Fix(\varphi)$ una retta, φ è una rotazione di $E_3(\mathbb{R})$ di asse

$$r = Fix(\varphi) : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

cioè l'asse x del riferimento.
Infine, poiché la giacitura di r è $W = \langle e_1 \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$, la giacitura di un piano α normale ad r è $W^\perp = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$, di cui $\{e_2, e_3\}$ è base ortonormale. Quindi, detta L la parte lineare di φ (la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$ è A), la rotazione nel piano α ha come parte lineare $L' := (L_{|W^\perp})_\#$: la matrice di L' rispetto alla base $\{e_2, e_3\}$ è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix},$$

e dunque l'angolo di rotazione è $\frac{\pi}{6}$. $\square$

6. Determiniamo anzitutto la giacitura W del piano $\alpha : x + 2y = 0$:

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\} = \{(-2y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle = \langle w_1, w_2\rangle \,, \end{aligned}$$

avendo posto $w_1 = (-2, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$. Ricordando la condizione di perpendicolarità tra retta e piano ((l, m, n) proporzionale ad (a, b, c)), abbiamo che una terna di parametri direttori della direzione perpendicolare a W è data dal vettore $u = (1, 2, 0)$. In altri termini la giacitura di una retta perpendicolare ad α è

$$W^{\perp} = \langle u\rangle = \langle(1, 2, 0)\rangle \,.$$

Allora, detta L la parte lineare della riflessione φ di $E_3(\mathbb{R})$ rispetto ad α, abbiamo che $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'automorfismo tale che

$$L(u) = -u, \quad L(w_1) = w_1, \quad L(w_2) = w_2.$$

Quindi, essendo $\mathcal{B} = \{u, w_1, w_2\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata L rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$M := M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}_c}(L)$ associata ad L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$, calcoliamo la matrice di passaggio da $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$ e la sua inversa:

$$N := M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}(id)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque, svolgendo i calcoli, si ha che

$$A = NMN^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora φ ha equazione $X' = AX + b$, cioè

$$\varphi : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y) + b_1 \\ y' = \frac{1}{5}(-4x - 3y) + b_2 \\ z' = z + b_3 \end{cases} .$$

Infine, poichè l'origine del riferimento $O = (0, 0, 0) \in \alpha$, O è un punto unito di φ. Quindi, imponendo $\varphi(O) = O$, si ha che $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ (cioè $b = 0_{\mathbb{R}^3}$).
In definitiva, le equazioni della riflessione rispetto ad α sono:

$$\varphi : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x - 3y) \\ z' = z \end{cases} .$$

$\square$

7. Si veda lo svolgimento dell'Esercizio 2(d). $\square$