Supporto didattico per Analisi 1-2

a cura di Marco Gallo*

Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

21 gennaio 2019

Tali esercizi sono stati estratti dalle ultime (2012-2017) prove d'esame ed esoneri del corso di Analisi 1-2 presso il Dipartimento di Matematica di Bari. Tali corsi (incluse le esercitazioni) sono stati tenuti dai professori Lorenzo D'Ambrosio, Dino Fortunato, Sandra Lucente, Giuseppe Muni e Silvia Romanelli.
Le tracce degli anni precedenti possono essere trovate sulla pagina della dott.ssa Lucente: `http://sandralucente.it/didattica`.
Come ulteriori supporti e/o approfondimenti, oltre gli appunti delle lezioni, si invita lo studente a consultare libri sull'argomento, ad esempio quelli consigliati a lezione dai docenti. Buon lavoro!

Indice

*email: `m.gallo29@studenti.uniba.it`; Stanza 20, III piano.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

1 Limiti

Questa sezione contiene vari problemi sui limiti, i quali includono sia esercizi che strizzano più l'occhio ai limiti notevoli, sia esercizi più agilmente attaccabili via sviluppo di Taylor. Sono presenti anche limiti di successioni, i quali hanno come strumento in più i teoremi di tipo Cesaro.
A questo link (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Infiniti ed infinitesimi) è possibile trovare nozioni generali sugli infiniti e gli infinitesimi.
A questo (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Formula di Taylor) e questo (*dm.uniba.it/~jannelli*, sezione Analisi 1, I polinomi di Taylor), invece, nozioni generali sullo sviluppo di Taylor.

1.1 Limiti di successioni

Esercizio 1. *Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite delle successioni*

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1} - 2}{(-1)^n - 2}, \qquad x_n = \frac{(n!)^3}{\mathrm{e}^n n^{2n}}.$$

Esercizio 2. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti. In caso di non esistenza determinare il massimo e minimo limite della successione.*

$$x_n = (-1)^n n^2 + n^2, \qquad z_n = \operatorname{arctg}(n)\cos(n\pi), \qquad t_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{(-1)^n n!}.$$

Esercizio 3. *Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della successione*

$$a_n = \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}.$$

Esercizio 4. *Calcolare, se esiste il limite della seguente successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 &= 2 \\ a_{n+1} &= 1 + \lg a_n \end{cases}.$$

Esercizio 5. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni. In caso di non esistenza determinare il massimo e minimo limite della successione.*

$$x_n = \frac{1}{n} + (-1)^n n, \qquad y_n = n + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Esercizio 6. *Calcolare, se esistono, i limiti delle successioni*

$$b_n = \frac{1 + \lg^2 n}{\sqrt{n} + \mathrm{e}^n}, \qquad c_n = \frac{\operatorname{sen}(1 - \sqrt{1 - n^{-2}})}{(\mathrm{e}^{1/n} - 1)^2}.$$

Esercizio 7. *Trovare una successione $\{a_n\}$ tale che soddisfi le seguenti proprietà*

$$\lim_n \frac{a_n}{3^n} = 0 \quad e \quad \lim_n \frac{a_n}{n^3} = +\infty.$$

Esercizio 8. *Trovare una successione $\{a_n\}$ tale che soddisfi le seguenti proprietà*

$$\lim_n \frac{a_n}{\log n} = 0 \quad e \quad \lim_n \frac{a_n}{\log(\log n)} = +\infty.$$

Esercizio 9. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni. In caso di non esistenza determinare il massimo e minimo limite della successione.*

$$x_n = (-1)^n n^2 + n^3, \qquad y_n = (-1)^n n^3 + n^2.$$

Esercizio 10. *Calcolare, se esistono, i limiti delle successioni*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\pi n}, \qquad b_n = \sqrt[2n]{5n}.$$

Esercizio 11. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione*

$$a_n = \frac{n^4 + \ln(n-1) + 4^n}{8^n + 7n^2 + \ln^3 n}, \qquad x_n = \sqrt[n]{\pi^n + \mathrm{e}^n + 2^n}.$$

Esercizio 12. *Calcolare il massimo e minimo limite delle successioni*

$$a_n = \cos(\pi n)\frac{8n+1}{2n+24}, \qquad x_n = (-1)^n \mathrm{e}^{-n} + 26.$$

Esercizio 13. *Calcolare il massimo e minimo limite delle successioni*

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}, \qquad x_n = n^3 + \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Esercizio 14. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni*

$$a_n = \frac{1 - n^4}{n - 2n^2 + 1}, \qquad x_n = \frac{\mathrm{sen} n + \ln n + 2^n}{\ln n - 2^n}.$$

Esercizio 15. *Calcolare, se esistono, i limiti della seguenti successioni*

$$a_n = \frac{n^5 4^n}{(n+1)!}, \qquad b_n : \begin{cases} b_1 &= 1/2 \\ b_{n+1} &= b_n^2 \end{cases}$$

giustificando i passaggi.

Esercizio 16. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{7n}\right)^n \sqrt[n]{2\pi}, \qquad z_n = \frac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{8n^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{5n^2}\right)}.$$

1.2 Limiti di funzioni

Esercizio 17. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{1 - e^{x^2}}.$$

Esercizio 18. *Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle funzioni*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \cos x - \mathrm{sen} x, \\ f_2(x) &= 1 + x^2 - \mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{sen}^3 x, \\ f_3(x) &= \mathrm{sen}(1 - \cosh x) - \mathrm{sen}(\cos x - 1). \end{aligned}$$

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_3(x)}{f_1(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Esercizio 19. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^x-(\mathrm{sen}x)^{\mathrm{sen}x}\right), \qquad \lim_{x\to \pi/2}\left(x^x-(\mathrm{sen}x)^{\mathrm{sen}x}\right).$$

Esercizio 20. *Dato $\alpha\in\mathbb{R}$ si consideri la famiglia di funzioni*

$$f_\alpha(x)=\frac{x^x-2(\cos(\pi x))^2-x+2}{(\sqrt{x}-1)^\alpha}.$$

Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty}f_\alpha(x), \qquad \lim_{x\to 1^+}f_\alpha(x).$$

Esercizio 21. *Dato $\alpha>0$ si consideri la famiglia di funzioni*

$$f_\alpha(x)=\frac{x^x-|\sin(\pi x)|^\alpha-x}{x^\alpha-x}.$$

Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty}f_\alpha(x), \qquad \lim_{x\to 0^+}f_\alpha(x), \qquad \lim_{x\to 1}f_\alpha(x).$$

Esercizio 22. *Stabilire se le seguenti funzioni sono infinite o infinitesime in 0 e in $+\infty$ e in caso di risposta positiva se ne stabilisca l'ordine*

$$\ln\left((e^x)^2-\sin x\right), \qquad \frac{e^x|x|}{(x-1)^2}-\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 23. *Sia*

$$f_1(x)=\frac{\mathrm{e}\cos(x)-\mathrm{e}^x}{\mathrm{sen}x\ln x}, \qquad f_2(x)=\frac{\mathrm{e}\cos(x-1)-\mathrm{e}^x}{\mathrm{sen}x\ln x}.$$

Calcolare, se esistono, i limiti di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $x\to 0$, $x\to 1$, $x\to+\infty$.

Esercizio 24. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Esercizio 25. *Calcolare i seguente limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}}{\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}}{\ln(1+x)}.$$

Esercizio 26. *Calcolare i seguente limiti*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{x-\sin(\pi x/2)} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x-1-\ln(x)}{x-\sin(\pi x/2)}.$$

Esercizio 27. *Calcolare, se esiste il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\mathrm{sen}x}-1-x\mathrm{sen}x}{\sqrt{1+x^4}-1-\mathrm{tg}^4x}.$$

Esercizio 28. *Calcolare, se esistono i limiti di $f(x)$ per $x\to 0$, $x\to\pm\infty$, essendo*

$$f(x)=\mathrm{arctg}\left(\frac{2^{x^2}-1}{1-3^x}\right).$$

Esercizio 29. *Calcolare se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to 0$, essendo*

$$f(x) = \frac{2^{\operatorname{arctg}(x-\sin x)} - 1}{3^{\arcsin(x-\tan x)} - 1}.$$

Esercizio 30. *Calcolare, se esistono i limiti di $f(x)$ per $x \to 0$, $x \to \pm\infty$, essendo*

$$f(x) = \left(\frac{1-x+x^2}{1-x}\right)^{1/x}.$$

Esercizio 31. *Calcolare al variare di $\beta, \eta \in \mathbb{R}$, se esiste, il limite*

$$\lim_{s \to -\infty} \left[\left(\frac{1}{1-\beta e^s}\right)^{\eta} - 1\right] e^{-s}.$$

Esercizio 32. *Sia*

$$f(x) = 1 - \cos(x) + \log(\cos(x)).$$

Dire se esiste il limite di f per $x \to 0$. In caso affermativo, stabilire se f è infinitesima o infinita in 0 e in tal caso stabilirne l'ordine. Analogamente discutere $x \to +\infty$.

Esercizio 33. *Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 0$, $x \to \pm\infty$ della seguente funzione*

$$g(x) = \frac{x - \lg(1 - x\mathrm{sen}x)}{x^2 + \cos(x^2) - 1}.$$

Esercizio 34. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Esercizio 35. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos^2(x)) + \mathrm{sen}x^2}{(\mathrm{e}^x - x - \sqrt{\cos(2x)})^2}.$$

Esercizio 36. *Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 0$, $x \to \pm\infty$ della seguente funzione*

$$g(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\right) + \frac{x-1}{|x-1|}.$$

Esercizio 37. *Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 0$, $x \to \pm\infty$ della seguente funzione*

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[4]{x^4 - 3x}.$$

Esercizio 38. *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sin(1/x)} - 1 - 1/x}{\log\left(1 + \frac{3x}{(x-1)^3}\right) - \frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 39. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x \to 0} x^{\ln(1+x)}.$$

Esercizio 40. *Determinare i numeri $a, \gamma \in \mathbb{R}$, se esistono, tali che*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{(a+1)x^{\gamma-1} + 2ax - 1} = 1.$$

Esercizio 41. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^{\sin^2 x}-1}{x\mathrm{arctg}x} & x < 0 \\ \\ \ln(1+\sqrt{\alpha + x}) & x \geq 0 \end{cases}.$$

Per gli altri $\alpha \in \mathbb{R}$ dire se la funzione ammette salti, asintoti verticali o oscillazioni.

Esercizio 42. *Calcolare, se esistono,*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{10-x^2}\right)^x, \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(1+(x-1)^2)}{\mathrm{e}^{x-1}-1}+\frac{x-1}{|x-1|}\right).$$

Esercizio 43. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x}-x}{\cos(7x)\sin(5x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x+4}-x}{\cos\left(\frac{7}{x}\right)\sin\left(\frac{5}{x}\right)}.$$

Esercizio 44. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin(3x)}.$$

Esercizio 45. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x^6}\right)(8-\mathrm{e}^{-3x})}{\left(\sqrt[4]{1+\sin(1/x)}-1\right)\mathrm{tg}\frac{1}{x^5}}.$$

Esercizio 46. *Calcolare, se esistono*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^2+16x^3-2}-x\right)(x+\log x), \qquad \lim_{x\to 1}\left(\sqrt[5]{x^2+16x^3-2}-x\right)(x+\log x).$$

Esercizio 47. *Calcolare, se esiste*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{\ln x^2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Esercizio 48. *Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 0$ e $+\infty$ di*

$$h(x) = \frac{\sqrt[5]{x^6+5x^5}-x}{\mathrm{sen}^2(8x)(1-\cos(2x))^2}.$$

Esercizio 49. *Si calcolino, se esistono, i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to 0$ della funzione*

$$h(x) = \frac{f(x)-2x+x\mathrm{sen}x}{x^4}$$

essendo

$$f(x) = 2 - x^2 + 6x^4 + o(x^4).$$

Esercizio 50. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^{\lg^2(1+x)}-1}{x\mathrm{arcsen}x} & x < 0 \\ \\ \sqrt{\alpha+x}-1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

Per gli altri $\alpha \in \mathbb{R}$ dire se la funzione ammette salti, asintoti verticali o oscillazioni.

Esercizio 51. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}3^x\right)}{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

Esercizio 52. *Calcolare, se esiste, il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x} - \ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Esercizio 53. *Rispondere alle seguenti domande:*

a) Di che ordine di infinitesimo è $(\sqrt{1+x}-1)^4$ *per* $x\to 0$*?*

b) Usando la funzione logaritmo, costruire un infinitesimo di ordine superiore ad uno per $x \to 0$*;*

c) È vero che $(\cos(1/x)-1)^2$ *è un infinitesimo di ordine superiore a 2 per* $x\to+\infty$*? Perché?*

Esercizio 54. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\mathrm{e}^x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8+2^x+4^{-x}}{\ln x + x^2 + \operatorname{sen}(x)}.$$

Esercizio 55. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x+7}{x^3-9}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\mathrm{e}^{x-2}-1}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\ln(1-x))}{\operatorname{tg}(3x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\sqrt{6x}}.$$

Esercizio 56. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\mathrm{e}^x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\mathrm{e}^x}.$$

Esercizio 57. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}+\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right).$$

Esercizio 58. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti al variare di* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\mathrm{e}^{-2x^2} - \operatorname{sen} x + \beta x^2}{x^\gamma \cos x^2}.$$

Esercizio 59. *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt[4]{x}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Esercizio 60. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{\operatorname{arctg} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x + \ln(1+x^2)}.$$

Esercizio 61. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4+x\ln x}{x^2+2}, \qquad \lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{2^{\mathrm{e}-x}-1}{x^2-\mathrm{e}^2}.$$

Esercizio 62. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-6x+2}\right), \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x^6}{x^{12}+\pi}.$$

Esercizio 63. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5}{6x^2\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{\mathrm{e}^x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{x\mathrm{e}^x}}.$$

Esercizio 64. *Calcolare, se esistono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\ln(3+\mathrm{sen}x), \qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\ln(2+\mathrm{sen}x).$$

Esercizio 65. *Rispondere alle seguenti domande:*

a) *Qual è l'ordine di infinitesimo di* $f(x)=\ln(1+2x)^4$ *per* $x\to 0$*?*

b) *Dire se è vero che* $f(x)=\ln(1+2x)^4$ *per* $x\to+\infty$ *è un infinito di ordine inferiore a* 3 *e giustificare la risposta.*

c) *Usando la funzione potenza di* π *costruire un esempio di infinitesimo di ordine superiore a* $1/2$*.*

2 Studio di funzione

A questo indirizzo (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Lo studio di funzione) è possibile trovare uno schema riassuntivo su come affrontare uno studio di funzione.

Esercizio 66. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x) := \left| \arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \right|.$$

Dopo aver studiato la funzione tracciandone un grafico qualitativo, si determini in quali intervalli la funzione è invertibile e trovarne ivi l'inversa.

Esercizio 67. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \frac{x|\ln x|}{(\ln x - 1)^2}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 68. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \frac{e^x |x|}{(x-1)^2}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 69. *Siano* h *e* g *le funzioni definite da* $h(x) := \frac{e^x|x|}{(x-1)^2}$ *e* $g(x) := \arctan(-x)$. *Posto*

$$f := g \circ h,$$

se ne tracci il grafico qualitativo specificando il codominio. Utilizzare, furbamente, l'esercizio 68.

Esercizio 70. *Si studi, al variare di* α, *la funzione*

$$f(x) := \mathrm{sen} x \, \mathrm{e}^{\alpha \cos x}$$

e se ne specifichi il codominio. Se ne tracci il grafico qualitativo in corrispondenza di $\alpha = \sqrt{2}/2$.

Esercizio 71. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \mathrm{arcsen} x \, \mathrm{e}^{\arccos x},$$

se ne specifichi il codominio e se ne tracci il grafico qualitativo omettendo lo studio della derivata seconda.

Esercizio 72. *Studiare la seguente funzione tracciandone un grafico qualitativo e precisandone il codominio*

$$f(x) := \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x(\pi - x)}}{\mathrm{sen} x}\right).$$

Esercizio 73. *Sia* $f(x) := \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x(\pi-x)}}{\mathrm{sen} x}\right)$. *Dedurre il grafico qualitativo di*

$$g(x) := \ln\left(f(x) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Utilizzare, furbamente, l'esercizio 72.

Esercizio 74. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Dopo aver studiato la funzione tracciandone un grafico qualitativo, si determini in quali intervalli la funzione è invertibile.

Esercizio 75. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{x^2}}{|x| + 1}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio e il numero di flessi.

Esercizio 76. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \ln^2(\cos x),$$

se ne specifichi il codominio e se ne tracci il grafico qualitativo omettendo lo studio della derivata seconda.

Esercizio 77. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1,$$

se ne specifichi il codominio e se ne tracci il grafico qualitativo, compresa la convessità.

Esercizio 78. *Studiare la funzione*

$$f(x) := |x + 1|\mathrm{e}^{-x}$$

disegnarne approssimativamente il grafico e specificarne il codominio e gli intervalli di convessità. Scrivere poi, se esiste, l'equazione della retta tangente al suddetto grafico nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizio 79. *Studiare la funzione*

$$f(x) := |x|\mathrm{arctg}x,$$

disegnarne approssimativamente il grafico e specificarne il codominio.

Esercizio 80. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \frac{x\log^2(x)}{\left|x\log^2(\frac{1}{x})\right|\left|1 + x\log^2(x)\right|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo.

Esercizio 81. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \sqrt{x^2 - 9|x - 1|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio e descrivendone il comportamento nei punti di non-derivabilità.

Esercizio 82. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \sqrt[3]{|x-1||x-2|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio e descrivendone il comportamento nei punti di non-derivabilità.

Esercizio 83. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \lg_2 \left(1 + \frac{x}{|x-1|}\right) - 1$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 84. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \ln(x - \ln x)$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio e la convessità.

Esercizio 85. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \frac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{x} - 4}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 86. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \frac{e^{-2x}}{7 - 4|x|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 87. *Si studi la funzione*

$$f(x) := e^{\frac{1}{|x-1|-1}}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 88. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \cos^2 x + \mathrm{sen} x$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 89. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\lg x}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo.

Esercizio 90. *Si studi la funzione*

$$f(x) := (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-|x|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 91. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \mathrm{e}^{-x}|x(x+1)|$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 92. *Si studi la funzione*

$$f(x) := x\left|e^{x-1} - 1\right|$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 93. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \frac{x^2}{\ln|x| - 2}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio. Omettere lo studio della derivata seconda.

Esercizio 94. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \arctan\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right)$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 95. *Si studi la funzione*

$$f(x) := \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 96. *Si studi la funzione*

$$f(x) := |x|\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+6\right)$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 97. *Si studi la seguente funzione omettendo il calcolo della derivata seconda*

$$f(x) := (x-1)^{1/3}(x^2-4)^{2/3}$$

e si tracci il grafico qualitativo.

Esercizio 98. *Si studi la funzione*

$$f(x) := (x^2-2x-3)\mathrm{e}^{-|x-1|}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 99. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := x^3\ln|x|$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 100. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 + x - 2}.$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio, omettendo lo studio della derivata seconda ma prevedendo il numero minimo di flessi.

Esercizio 101. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 102. *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) := \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

e se ne tracci il grafico qualitativo specificandone il codominio.

Esercizio 103. *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) := \sqrt[3]{x^4 - x^2}$$

precisando il codominio ed evitando il calcolo della derivata seconda.

3 Integrali e integrali generalizzati

A questo indirizzo (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Integrazione metodi) è possibile trovare uno schema riassuntivo su alcune tecniche di integrazione.
A questo (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Integrali generalizzati), invece, un riepilogo sugli integrali generalizzati.

Esercizio 104. *Descrivere l'insieme delle primitive della funzione*

$$h(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}$$

e calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 h(t) \mathrm{d}t.$$

Esercizio 105. *Si determini il dominio della funzione*

$$h(x) = \frac{|\lg x^2|}{x(\lg x^2 - 1)} + x \lg x.$$

Dire se h è integrabile secondo Riemann oppure in senso generalizzato nei seguenti intervalli e in caso positivo calcolare il valore di tale integrale sugli insiemi assegnati

- $[1/2, 1]$,
- $[0, 1/2]$,
- $[1, \sqrt{\mathrm{e}}]$.

Esercizio 106. *Si descriva l'insieme delle primitive della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

Esercizio 107. *Si determini il dominio della funzione*

$$h(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{sen} x}.$$

Dire se h è integrabile secondo Riemann oppure in senso generalizzato nei seguenti intervalli e in caso positivo calcolare il valore di tale integrale sugli insiemi assegnati

- $[0, \pi/2]$,
- $[-\pi/2, 0]$.

Si determini poi una primitiva di h passante per il punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

Esercizio 108. *Si determini la primitiva di*

$$h(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x} + \sqrt[3]{\mathrm{e}^x}}{\sqrt[6]{\mathrm{e}^x} - 1} \mathrm{d}x$$

passante per il punto $(1, 1)$.

Esercizio 109. *Dire se esiste, ed eventualmente calcolare*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 110. *Calcolare una primitiva di*

$$g(x) = \frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\mathrm{tg}^2(x/2)+1}.$$

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ *in modo che sia continua la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen} x + \alpha & -\pi \leq x < -\frac{2}{3}\pi \\ g(x) & -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 0 \end{cases}.$$

Calcolare quindi

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 111. *Si calcoli*

$$\int_{1/2}^{4} \sqrt{|x| - |x-1|}.$$

Esercizio 112. *Calcolare*

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3-8}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 113. *Calcolare una primitiva di*

$$g(x) = \frac{2-\pi^{2x}}{1-\pi^x}$$

passante per $(1,1)$.

Esercizio 114. *Trovare l'area racchiusa dalle curve* $f(x) = x^4\mathrm{e}^{3x}+1$, $g(x) = \sqrt{x}$ *e dalla rette* $y=0$, $y=1$.

Esercizio 115. *Descrivere*

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen} x \cos x}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 116. *Dire se i seguenti integrali impropri convergono*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 117. *Dire se il seguente integrale improprio converge e in caso positivo calcolare il valore*

$$\int_1^{e} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 118. *Dire se il seguente integrale improprio converge e in caso positivo calcolare il valore*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 119. *Dire se* $F(x) = \int_x^5 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ *è una funzione monotona e se sì specificare il tipo di monotonia.*

Esercizio 120. *Calcolare il seguente integrale definito*

$$\int_0^{1/2} (\operatorname{arcsen}(2x) + \operatorname{arctg}(2x))\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 121. *Si determini la primitiva di*

$$f(x) = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x$$

passante per il punto $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Esercizio 122. *Calcolare*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} f(|x|)\mathrm{d}x$$

essendo $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$.

Esercizio 123. *Si calcoli*

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \mathrm{d}x.$$

Esercizio 124. *Determinare la primitiva della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x} + \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$$

passante per $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Esercizio 125. *Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle ordinate e la parabola* $y^2 + x - 4 = 0$.

Esercizio 126. *Descrivere l'insieme delle primitive di* $h(x) = \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$.

Esercizio 127. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{x}.$$

Esercizio 128. *Trovare la primitiva di* $h(x)$ *passante per* $(0,1)$ *essendo*

$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(1-2t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Esercizio 129. *Calcolare, se esiste, il seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t\cos t} - \mathrm{e}^{\frac{t}{\cos t}}\right) \mathrm{d}t}{x^3}.$$

Esercizio 130. *Discutere al variare di* α *la convergenza degli integrali impropri*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}.$$

Esercizio 131. *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{3 - 4\cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

Esercizio 132. *Calcolare l'area compresa tra le rette* $y = 0$, $x = \alpha$, $x = \beta$ *con* $\alpha, \beta > 0$ *e*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Cosa si può dire se $\alpha \to 0$ *e* $\beta \to \infty$*?*

Esercizio 133. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x(x^2+3)^2}.$$

Esercizio 134. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{1}{x^3-4x^2+9x-10}.$$

Dire se il seguente integrale generalizzato converge

$$\int_3^\infty h(x)\mathrm{d}x$$

e, se è possibile, determinare il valore.

Esercizio 135. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{3x}-9}}.$$

Dire se il seguente integrale generalizzato converge

$$\int_1^\infty h(x)\mathrm{d}x$$

e, se è possibile, determinare il valore.

Esercizio 136. *Calcolare al variare di* $a > 1$ *il seguente integrale*

$$\int_{1/a}^{a} \frac{1}{x(\arccos(\ln(x)))\sqrt{1-\ln^2 x}}\mathrm{d}x.$$

Dire cosa accade per $a \to +\infty$ *e* $a \to 1$*.*

Esercizio 137. *Calcolare al variare di* $a > 1$ *il seguente integrale*

$$\int_a^1 \frac{1}{(2x-1)^2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x.$$

Alternativamente, calcolare al variare di $1/2 < a < 1$ *il seguente integrale*

$$\int_a^1 \frac{1}{(2x-1)^2}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x.$$

Dire, in entrambi i casi, cosa accade per $a \to 1/2$*.*

Esercizio 138. *Trovare la primitiva di* $h(x)$ *passante per* $(0, 1)$ *essendo*

$$h(x) = x\sqrt{x+3}.$$

Esercizio 139. *Discutere la convergenza degli integrali impropri*

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Esercizio 140. *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{1}{\mathrm{sen}x}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 141. *Calcolare l'area compresa tra le rette $y=0$, $x=2$, $x=\beta$ con $\beta>2$ e*

$$g(x) = \frac{5x-8}{x^2+2x+5}.$$

Cosa si può dire per $\beta \to \infty$?

Esercizio 142. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^3+x^2-8x-12}.$$

Esercizio 143. *Calcolare la primitiva di*

$$h(x) = \frac{1}{\cos x}$$

passante per $(0,0)$. *Calcolare*

$$\int_{\pi/2}^{\pi/3} h(x)\mathrm{d}x.$$

Discutere la convergenza di

$$\int_0^{\pi/3} h(x)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 144. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x+2}}x^2.$$

Discutere la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 145. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = 1 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Discutere la convergenza di

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 146. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^2}.$$

Discutere la convergenza dei seguenti:

- $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^2}\mathrm{d}x$;
- $\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^2+x^\alpha}\mathrm{d}x$, *al variare di* $\alpha \geq 0$;
- $\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x+x^{2\beta}}\mathrm{d}x$, *al variare di* $\beta \geq 0$.

Esercizio 147. *Calcolare*

$$\int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{-|x+1|^3}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

Esercizio 148. *Calcolare*

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2|\mathrm{sen}x|\mathrm{d}x.$$

Esercizio 149. *Calcolare*

$$\int_0^3 |\mathrm{arctg}(1-\sqrt{x})|\mathrm{d}x.$$

Esercizio 150. *Tra le primitive della seguente funzione, trovare quella passante per* $(0,1)$

$$g(x) = \frac{1+(\mathrm{tg}x)^3}{\cos^2 x}.$$

Esercizio 151. *Calcolare l'area racchiusa tra le rette* $x = 0$, $y = -\pi/2$, $y = \pi$ *e la funzione* $f(x) = |x|\cos x$.

Esercizio 152. *Dire se il seguente integrale generalizzato converge*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 153. *Descrivere l'insieme delle primitive della seguente funzione*

$$h(x) = \frac{x^2+4x-9}{x^3-4x^2+5x-2}.$$

Esercizio 154. *Tra le primitive della seguente funzione, trovare quella passante per* $(0,1)$

$$g(x) = \int x\sqrt{x^2-12}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 155. *Calcolare l'area racchiusa tra le rette* $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ *e la funzione* $f(x) = |x|\mathrm{arctg}x$.

Esercizio 156. *Dire se il seguente integrale generalizzato converge*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 157. *Descrivere l'insieme delle primitive della seguente funzione*

$$h(x) = \frac{3x^3+4x+16}{x^4-16}.$$

Esercizio 158. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{1}{3\mathrm{sen}x+7\cos x}.$$

Esercizio 159. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{2x}}.$$

Esercizio 160. *Calcolare*

$$\int_{-3}^{5} \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 + x - 2} \mathrm{d}x.$$

Esercizio 161. *Descrivere l'insieme delle primitive di*

$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

4 Serie numeriche

A questo link (*sandralucente.it*, sezione Didattica, Appunti delle lezioni, Serie numeriche) è possibile trovare nozioni generali sulle serie numeriche, inclusi i criteri utili agli esercizi.

Esercizio 162. *Determinare gli* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui la seguente serie converge*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \lg(1 + |\alpha|^n).$$

Esercizio 163. *Determinare gli* $x \in \mathbb{R}$ *per cui la seguente serie converge*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lg(\lg(n))}{\lg(n)} x^n.$$

Esercizio 164. *Al variare di* $x \in \mathbb{R}$ *si determini l'insieme di convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{nx}}{n!}.$$

Esercizio 165. *Al variare di* $x \in \mathbb{R}$ *si determini l'insieme di convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) (x - \pi)^n.$$

Esercizio 166. *Al variare di* $x \in \mathbb{R}$ *si determini l'insieme di convergenza delle serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^x.$$

Esercizio 167. *Al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si determini l'insieme di convergenza assoluta e l'insieme di convergenza semplice delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{\alpha}.$$

Esercizio 168. *Al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si determini l'insieme di convergenza delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n + (\sqrt{n+3})^{\alpha}} \ln n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{n^{\alpha} + \sqrt{n+3}} \ln n.$$

Esercizio 169. *Stabilire per quali valori del parametro* $x \in \mathbb{R}$ *la seguente serie numerica converge*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + 7}{\cos(\pi n) 2^n} x^n.$$

Esercizio 170. *Discutere al variare di* $t \in \mathbb{R}$ *il comportamento della seguente serie e per i parametri di convergenza calcolare la somma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^n.$$

Esercizio 171. *Determinare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\ln\left(1+\frac{9}{n^2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{n}\right)-e^{\frac{1}{n^4}}\right).$$

Esercizio 172. *Si consideri la successione*

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n \text{ pari}\\ \\ \frac{1}{n^2} & n \text{ dispari}\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n.$$

Esercizio 173. *Discutere la convergenza della seguente serie, al variare degli $x\in\mathbb{R}$ per cui è ben definita*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n^2+7}+\frac{x^2+7}{n^x}\right).$$

Esercizio 174. *Al variare di $x\in\mathbb{R}$ si descriva il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-2}(x-2)^n.$$

Esercizio 175. *Al variare degli $x\in\mathbb{R}$ per cui è ben definita, si determini l'insieme di convergenza di una delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{3n}}{3n}+\frac{n^{3x}}{x}\right),\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}n^8x^{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 176. *Stabilire per quali $x\in\mathbb{R}$ le seguenti serie convergono*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x+n^2}{x^2+n^4},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x+n^3}{x^2+n^4}.$$

Esercizio 177. *Al variare degli $x\in\mathbb{R}$ per cui è ben definita, si determini l'insieme di convergenza delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n(n^2+2)},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{2x-1})^n}{2^n(n^2+2)}.$$

Esercizio 178. *Stabilire al variare del parametro $x\in\mathbb{R}$, il carattere della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}}.$$

In corrispondenza degli $x\in\mathbb{R}$ per cui la serie converge, se ne calcoli la somma.

Esercizio 179. *Al variare di $x\in\mathbb{R}$ si descriva il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{nx}{n^2x^2+6}.$$

Esercizio 180. *Al variare di $\beta > 0$ si descriva il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta^{\ln n}}.$$

Esercizio 181. *Si consideri la successione*

$$a_n = \frac{n+54}{\sqrt{n^\alpha + 3n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Descrivere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della successione e quello della relativa serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 182. *Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie e per i parametri di convergenza calcolare la somma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^n.$$

Esercizio 183. *Descrivere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+n^2}{25+n^{2\alpha}}.$$

Esercizio 184. *Si consideri la successione*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n \text{ pari} \\ \\ \frac{1}{n^3} & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Esercizio 185. *Discutere la convergenza della seguente serie, al variare degli $x \in \mathbb{R}$ per cui è ben definita*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n + \lg n)(x-\pi)^n.$$

Esercizio 186. *Discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n.$$

Esercizio 187. *Discutere al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il comportamento delle seguenti serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n n^2 (\mathrm{e}^{-nx} + x^{-n}), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n n^2 (\mathrm{e}^{-n^2 x} + x^{-n^2}).$$

Esercizio 188. *Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (1+n)}.$$

Per $\alpha = 1$ calcolare anche la somma della serie.

Esercizio 189. *Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{\sqrt{n}} n^n}{n!} \alpha^n.$$

Esercizio 190. *Determinare il carattere della serie ed eventualmente la somma della seguente serie, al variare di $x \in A$, essendo $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme per cui l'espressione ha senso*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 5^{n+1/2} (\lg(x+1))^n.$$

Esercizio 191. *Calcolare, se esiste, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite della seguente successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_{n+1} &= -\alpha\, c_n \end{cases}$$

e stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n.$$

Esercizio 192. *Descrivere al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8+n^6}{6n+n^{8\beta}}.$$

Esercizio 193. *Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n+12} x^n.$$

Dire anche per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie precedente diverge positivamente.

Esercizio 194. *Si consideri la successione*

$$a_n = \frac{n}{2n+4} \mathrm{e}^{nx}.$$

Descrivere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della successione e quello della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 195. *Si consideri la successione*

$$a_n = \frac{1+(-1)^n n}{2n+4}.$$

Calcolare il limite della successione e descrivere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\pi)^n$.

Esercizio 196. *Si consideri la successione*

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n}.$$

Descrivere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della successione e quello della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Esercizio 197. *Discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(2^n+3^n)(x-6)^n.$$

Esercizio 198. *Si consideri la successione*

$$a_n = \left(\frac{2^n}{3^{2n}} + (-1)^n 3\frac{3^{n+1}}{4^n}\right).$$

Si studi la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, e se ne determini la somma se convergente; discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Esercizio 199. *Si studi al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|x-\pi|^n}{3^n+5}.$$

Esercizio 200. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

e discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente generalizzazione

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln n}{(n+1)^\alpha}.$$

Esercizio 201. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 5n + n^2 + \lg^7 n}{6n^\alpha}$$

per $\alpha = 1$ ed $\alpha = 3$.

Esercizio 202. *Dire se le seguenti serie convergono ed eventualmente calcolare la somma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n.$$

Esercizio 203. *Discutere al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ l'insieme di convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n^4+8}.$$

Esercizio 204. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt{n+3}}.$$

Esercizio 205. *Dire se le seguenti serie convergono ed eventualmente calcolare la somma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 3^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^n.$$

Esercizio 206. *Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite*

$$\lim_n \frac{\sqrt[n^2]{3} - 1}{n^\alpha}.$$

Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\beta \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[n^2]{\beta} - 1).$$

Esercizio 207. *Determinare, al variare di $b \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2b}{b-1} \right)^n$$

ed eventualmente calcolarne la somma.

Esercizio 208. *Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2 - \ln n} (x-5)^n.$$

Esercizio 209. *Determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n n^3 \mathrm{e}^{nx}$$

ed eventualmente calcolarne la somma.