

Corso di riallineamento in Matematica (a.a. 2017/2018)

Marco Gallo*

Dipartimento di Matematica, Università di Bari, via E. Orabona, 4, I-70125 Bari - Italy

14 settembre 2019

Indice

1	Disequazioni razionali	2
2	Disequazioni irrazionali e con valore assoluto	3
3	Disequazioni esponenziali e logaritmiche	4
4	Geometria analitica	5
5	Disequazioni goniometriche	6
	(Alcuni) libri di riferimento	7

Questa proposta di esercizi ha lo scopo di raggruppare diverse tecniche basilari per lo studio di disequazioni (e non solo). Potrebbero, ovviamente, contenere errori o sviste: vi chiederei in tal caso di segnalarmeli. Tali esercizi vogliono essere un punto di inizio per una revisione (o studio ex novo) da parte di quegli studenti che, a causa di un background di scuola superiore non particolarmente florido, hanno avuto difficoltà ad approcciarsi a questi argomenti. L'invito è quindi a consultare i diversi libri ed eserciziari universitari esistenti, dove si troverà un'offerta ben più ampia e sistematica di questa. Tra quelli citati in bibliografia, troviamo in particolare [1] e [2], così come [3] e [4]; anche su [5], [6], [7] e [8] si trova qualcosa di interessante. Buon lavoro!

*email: m.gallo29@studenti.uniba.it; Stanza 20, III piano.



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI BARI
ALDO MORO

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA

1 Disequazioni razionali

Esercizio 1.

$$x > 0.$$

Esercizio 2.

$$x - \frac{1}{x} \geq 0.$$

Esercizio 3.

$$\frac{x-1}{x^2-1} \geq 0.$$

Esercizio 4.

$$\frac{x^4 + 7x^2 - 18}{x^3 - 27} \leq 0.$$

Esercizio 5.

$$(x+1)^2 + (x-1)^4 \leq 0.$$

Esercizio 6. Sia $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^2 + k} < 0.$$

Esercizio 7. Sia $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la sezione aurea. Risolvere, senza l'uso della calcolatrice:

$$\frac{x + \phi}{2x^2 - 5x - 1} > 0.$$

Esercizio 8. Siano $f(x) := \frac{1}{2-x}$ e $g(x) := \frac{2}{x+1}$. Risolvere:

$$(f \circ g)(x) \geq 0$$

e

$$(g \circ f)(x) \geq 0.$$

Esercizio 9. Si trovi il massimo sottoinsieme di \mathbb{R} ove è definita:

$$\sqrt{(x+1) + 2x(x+1)}.$$

Esercizio 10. Si consideri l'insieme:

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid (1-x)(x^2-2) \geq 0\};$$

A è limitato (inferiormente/superiormente)? Chi sono $\sup A$ e $\inf A$? Sono essi, rispettivamente, massimo e minimo?

Esercizio 11. Sia

$$f(x) := \left(\frac{x}{1+x}\right) \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2.$$

Si calcoli

$$f^{-1}(]0, +\infty[).$$

2 Disequazioni irrazionali e con valore assoluto

Esercizio 12. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} > 1 \quad e \quad \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} > 1$$

e rispondere alla domanda: è vero che $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)?

Esercizio 13.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x.$$

Esercizio 14.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} \leq x.$$

Esercizio 15.

$$\sqrt[3]{x^3 + 2} > x.$$

Esercizio 16.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} \leq 1.$$

Esercizio 17.

$$\sqrt{(x+1)^2} > 1.$$

Esercizio 18.

$$|x+1| \leq 2.$$

Esercizio 19.

$$|x+1| > -2.$$

Esercizio 20.

$$|x+1| \geq 2x.$$

Esercizio 21.

$$|x-1| + |2x-3| > 2x+5.$$

Esercizio 22. Si consideri l'insieme:

$$A := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x + 2 \geq 0 \wedge x + 1 \leq 0\};$$

A è limitato (inferiormente/superiormente)? Chi sono $\sup A$ e $\inf A$? Sono essi, rispettivamente, massimo e minimo?

Esercizio 23. Sia

$$f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

Si calcoli

$$f^{-1}([0, +\infty[).$$

Esercizio 24. Si trovi il massimo sottoinsieme di \mathbb{R} ove è definita:

$$\log(|x + |x|| - 1).$$

Esercizio 25. Siano $f(x) := \sqrt{x} - 1$ e $g(x) := 1 - |x|$. Risolvere:

$$(f \circ g)(x) > 0$$

e

$$(g \circ f)(x) > 0.$$

3 Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Esercizio 26.

$$3^x > 9.$$

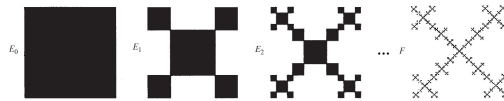
Esercizio 27.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 5.$$

Esercizio 28.

$$\frac{e^{x^2} e}{e^{2x}} > 1.$$

Esercizio 29. Si consideri il seguente insieme frattale F :



Si può dimostrare che la sua dimensione di Hausdorff, $\dim_H(F) =: s$, si può esprimere implicitamente come:

$$4\frac{1}{4^s} + \frac{1}{2^s} = 1.$$

Come si può esprimere, invece, esplicitamente?

Esercizio 30.

$$\log_{5/4}(x+1) \log_{4/5}(1-x) > 0.$$

Esercizio 31.

$$\log_2 x + 2 \log_2(x-2) > 3 + \log_2(3x).$$

Esercizio 32.

$$\log_3 x + \log_9 x > 2.$$

Esercizio 33.

$$3 \ln^3 x + \ln(x^3) + (\ln x)^2 + 1 < 0.$$

Esercizio 34. Si trovi il massimo sottoinsieme di \mathbb{R} ove è definita:

$$\tan\left(\log_{\pi}(e)x + \log_{\sqrt{2}}(8719)\right).$$

Esercizio 35. Si consideri l'insieme:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \log_x(3-x) \geq 1\} \cap [-100, 100];$$

A è limitato (inferiormente/superiormente)? Chi sono $\sup A$ e $\inf A$? Sono essi, rispettivamente, massimo e minimo?

Esercizio 36. Siano $f(x) := 2^x$ e $g(x) := \ln x$. Risolvere:

$$(f \circ g)(x) > x$$

e

$$(g \circ f)(x) > x.$$

Esercizio 37. Sia

$$f(x) := (2-x)^x.$$

Si calcoli

$$f^{-1}(]1, +\infty[).$$

4 Geometria analitica

Esercizio 38. *Trovare la retta:*

- *passante per $(-1, -3)$ e $(2, 3)$;*
- *parallela a $2x - y + 1 = 0$ e passante per $(-1, -3)$;*
- *perpendicolare a $2y + x - 8 = 0$ e passante per $(2, 3)$.*

Esercizio 39. *Siano $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ e $C(4, 1)$ tre punti del piano. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo da essi individuato. Scelto un segmento tra AB e BC , calcolare il suo punto medio, l'altezza ad esso relativa e l'equazione del suo asse.*

Esercizio 40. *Si trovi l'equazione che individua la circonferenza di raggio 2 e centro $(1, -1)$.*

Esercizio 41. *Si determini l'equazione della parabola di vertice $(2, 1)$ e passante per $(0, -1)$.*

Esercizio 42. *Si disegni la porzione di piano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ individuata da:*

$$\begin{cases} y - x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ y - 3x + 2 < 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

e dire se essa è limitata o meno. Considerata una funzione continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, il lettore affermi se - intuitivamente - sia possibile o meno applicare il teorema di Weierstrass.

Esercizio 43. *Si consideri la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$. Per ciascuno dei seguenti punti, dire quante rette tangenti alla circonferenza passano e calcolare tali eventuali rette: $(-4, 2)$, $(1, \sqrt{3})$, $(0, -1)$.*

Esercizio 44. *Si trovi l'equazione della circonferenza di centro $(-2, 1)$ e tangente alla retta $y = x + 7$.*

Esercizio 45. *Si consideri il fascio di coniche al variare di $k \in \mathbb{R}$:*

$$(k^2 - 2k)x^2 - (3k - 3k^2)y^2 + (k - 1)x + ky + 2k^2 - k - 3 = 0.$$

Si determini $k \in \mathbb{R}$ in modo da ottenere: una retta, una parabola, una circonferenza, una conica passante per l'origine (di quale conica si tratta?).

Esercizio 46. *Si consideri la parabola $y = 4x^2 - 3x + 5$ e la retta $y = 2x - 1$. Visti come polinomi, effettuarne la divisione con resto. Come riscaldamento, effettuare la divisione con resto tra i numeri 71 e 6.*

Esercizio 47. *Sia A l'insieme dei luoghi geometrici (retta, parabola, circonferenza) che possono essere visti come funzioni. Quali, tra essi, possono essere funzioni pari, e quali dispari¹? Quali ingettive, surgettive, bigettive, crescenti (strettamente), decrescenti (strettamente), limitate (inferiormente/superiormente)? Se effettuo la somma o il prodotto di due elementi di A , rimango in A ? E se li compongo? E se li inverto come funzioni (laddove siano invertibili)? Visti come polinomi, il quoziente di una qualsiasi divisione tra due elementi di A , è ancora in A ?*

¹«Data una qualsiasi funzione dispari, è sempre vero che 0 è un punto fisso (i.e., $f(0) = 0$)»: dimostrare o confutare tale affermazione.

5 Disequazioni goniometriche

Esercizio 48.

$$\sin x - 4 < 0.$$

Esercizio 49.

$$\cos x < 0.$$

Esercizio 50.

$$4 \sin^2 x - 3 < 0.$$

Esercizio 51.

$$3 \sin x - 2 \cos^2 x + 3 > 0.$$

Esercizio 52.

$$\tan(3x) \geq 1.$$

Esercizio 53.

$$\cotan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}.$$

È vero che $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$?

Esercizio 54.

$$\cos x \left(\sin x + \sqrt{3}/2\right) < 0.$$

Esercizio 55.

$$\sin x + \sin(2x) < 0.$$

Esercizio 56.

$$\sin(x/3) (2 \cos x + 1) < 0.$$

Esercizio 57. Risolvere in maniera analitica e/o grafica ²

$$\sin x + \cos x < 0.$$

Esercizio 58.

$$\sin x < 7/8.$$

Esercizio 59. Sia $f(x) := \sin x$, e si consideri $g(x) := f^{-1}(x)$ lì dove è possibile definirla. Risolvere:

$$g(x) > \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 60. Si trovi (almeno graficamente) il massimo sottoinsieme di \mathbb{R} ove è definita:

$$\arcsin(\cos^2 x + \sin x - 2 \cos x).$$

Esercizio 61. Sia $f(x) := x \sin x$. Si calcoli:

$$f^{-1}(]-\infty, 0]).$$

Esercizio 62. Si consideri l'insieme:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2\};$$

A è limitato (inferiormente/superiormente)? Chi sono $\sup A$ e $\inf A$? Sono essi, rispettivamente, massimo e minimo?

²La "e" è preferibile alla "o".

(Alcuni) libri di riferimento

- [1] A. Alvino, L. Carbone, G. Trombetti, *Esercitazioni di matematica (vol. 1, parte 1)*, Liguori Editore (1991)
- [2] P. Boieri, G. Chiti, *Precorso di matematica*, Zanichelli (1994)
- [3] P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di matematica (vol. 1, parte 1)*, Liguori Editore (1995)
- [4] M. Amar, A. M. Bersani, *Esercizi Di Analisi Matematica*, Esculapio Editore, Progetto Leonardo (2004)
- [5] L. De Michele, G. L. Forti, *Analisi Matematica: problemi ed esercizi*, Clup (1988)
- [6] G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di calcolo in una variabile*, Zanichelli (2001)
- [7] M. Ghisi, M. Gobbino, *Esercizi di analisi matematica I (parte A)*, Esculapio (2010)
- [8] G. Zwirner, *Istituzioni di matematiche (Vol. 1 e 2)*, Cedam (1975)