Insegnamento di: Geometria 4				
Classe di laurea: L-35		**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2020/2021	
Denominazione inglese insegnamento: Geometry 4		**Tipo di insegnamento:** Obbligatorio	**Anno:** 2	**Semestre:** 2
Tipo attività formativa: attività caratterizzante	**Ambito disciplinare:** Formazione teorica	**Settore scientifico-disciplinare:** MAT/03	**CFU totali: 8** di cui CFU lezioni: 5 CFU esercitazioni 3	
Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale ore di lezione: 40 ore di esercitazione: 30 (tenute dal dott. Amedeo Altavilla) totale ore didattica assistita: 70 totale ore di studio individuale: 130				
Lingua di erogazione: Italiano	**Obbligo di frequenza:** no			
Docente: Maria Falcitelli	**Tel: 39 080 5442844** **e-mail:** maria.falcitelli@uniba.it	**Ricevimento studenti:** Dip. Matematica piano 3 , stanza 9	**Giorni e ore ricevimento:** Previo appuntamento	
Conoscenze preliminari: Sono quelle usualmente acquisite nel primo anno e nel primo semestre del secondo anno del corso di laurea in Matematica. In particolare: teoria elementare degli insiemi, funzioni continue tra sottoinsiemi di **R**, elementi basilari di geometria affine e proiettiva.				
Obiettivi formativi: Acquisizione degli elementi basilari della Topologia, con particolare riferimento alla costruzione di esempi e allo studio delle proprietà degli spazi topologici che sono invarianti per omeomorfismi.				
Risultati di apprendimento previsti	**Conoscenza e capacità di comprensione:** Acquisizione di nuovi concetti geometrici e analitici, nonché di nuove tecniche di dimostrazione. **Conoscenza e capacità di comprensione applicate:** Le conoscenze acquisite si utilizzano in vari ambiti, sia della Matematica che di altre discipline, per esempio la topografia e la teoria dei grafi. **Autonomia di giudizio:** Capacità di individuare metodiche utili per risolvere nuovi problemi. **Abilità comunicative:** Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato. **Capacità di apprendere:** Acquisizione di metodiche che favoriscano l'abilità a collegare concetti introdotti in altre discipline matematiche e a risolvere nuovi problemi.			

Programma del corso

Spazi topologici. Definizione di topologia su un insieme. Esempi: la topologia discreta, la topologia banale. Definizioni di spazio topologico e di base e relative proprietà. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnata base. Confronto tra topologie: il concetto di topologia meno fine di un'altra. Esempi. Intorni di un punto: definizione, esempi e proprietà. Sistema fondamentale di intorni di un punto: definizione e proprietà. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnato sistema fondamentale di intorni di ciascun punto. Il primo e il secondo assioma di numerabilità: definizione e legame tra i due concetti. Ulteriori esempi: topologia cofinita e conumerabile, topologia generata dagli intervalli aperti a destra e chiusi a sinistra, accenni alle principali topologie su spazi di funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato.

Spazi metrici. Definizione di spazio metrico. Esempi. Sfere aperte in uno spazio metrico: definizione, esempi e proprietà. Esistenza ed unicità della topologia indotta da un'assegnata distanza. Caratterizzazione degli intorni di un punto di uno spazio metrico. Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità. Distanze equivalenti. La distanza di un punto da un sottoinsieme: esempi e proprietà.

Sottoinsiemi di uno spazio topologico. Interno, esterno e frontiera di un sottoinsieme di uno spazio topologico. Caratterizzazione degli insiemi aperti. Proprietà della frontiera di un insieme. Insiemi chiusi: definizione, caratterizzazione, esempi e proprietà. La chiusura di un insieme. Legame tra la chiusura, la frontiera e l'esterno di un insieme. Una caratterizzazione degli insiemi chiusi. Insiemi densi: definizione e caratterizzazione. Spazi topologici separabili. Ogni spazio che verifica il secondo assioma di numerabilità è separabile. Uno spazio metrizzabile e separabile verifica il secondo assioma di numerabilità.

Applicazioni continue, omeomorfismi. Applicazioni continue in un punto: definizione e caratterizzazione. Applicazioni continue tra spazi topologici: definizione, caratterizzazioni, esempi e proprietà. Le topologie immagine inversa, immagine diretta di una topologia mediante un'applicazione. Esempi. Applicazioni aperte: definizione e caratterizzazione. Omeomorfismi: definizione, caratterizzazioni e proprietà. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico. Proprietà topologiche. Esempi di omeomorfismi; la proiezione stereografica.

Sottospazi. La topologia indotta su un sottoinsieme di uno spazio topologico: definizione e proprietà. Esempio: la topologia indotta dalla topologia naturale di R su Z. Definizione di sottospazio. Caratterizzazione dei chiusi di un sottospazio. La chiusura di un sottoinsieme di un sottospazio. Sottospazi di uno spazio metrico, in particolare dello spazio Euclideo R^n. Sottospazi ed applicazioni continue. Inclusioni continue. Esempi di omeomorfismi tra sottospazi di R^n.

Prodotti, quozienti. La topologia prodotto di due topologie e lo spazio topologico prodotto. Esempi. Spazio topologico prodotto di n spazi e proprietà delle proiezioni su ciascun fattore. Caratterizzazione delle applicazioni continue a valori in uno spazio topologico prodotto. La topologia quoziente relativa ad un'applicazione. Identificazioni. Proprietà universale della topologia quoziente. Passaggio al quoziente di un'applicazione. Unicità dello spazio quoziente. La relazione di equivalenza associata ad un'identificazione. Esempi fondamentali di spazi quoziente: spazi proiettivi. Insiemi saturi per una relazione di equivalenza. Ulteriori esempi: la circonferenza; il cilindro, il toro, il nastro di Möbius e relative parametrizzazioni in R^3. Spazio che si ottiene da uno spazio topologico assegnato facendo collassare un sottoinsieme ad un punto.

Proprietà di separazione. Assiomi di Frèchet e di Hausdorff: definizione e legame tra i due concetti. Esempi di spazi di Hausdorff: gli spazi metrizzabili, i sottospazi di uno spazio di Hausdorff. Definizione di limite di una successione di punti. Unicità del limite di una successione di punti di uno spazio di Hausdorff. Relazione tra continuità e continuità per successioni. Ogni spazio metrizzabile è di Hausdorff. Spazi regolari, normali: definizione e legame tra i due concetti. Esempio di spazio T_3 che non è T_4; ogni spazio T_3 a base numerabile è T_4. Ogni spazio metrizzabile è normale. Applicazioni continue e assiomi di separazione. Catterizzazione degli spazi quoziente che sono di Hausdorff. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è uno spazio di Hausdorff.

Spazi compatti. Ricoprimenti aperti di uno spazio topologico. Spazi topologici compatti: definizione e caratterizzazione. Sottospazi compatti: definizione e proprietà. Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. Un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Applicazioni continue definite su uno spazio compatto: proprietà fondamentali e applicazioni. Esempio: l'applicazione antipodale e la compattezza dello spazio proiettivo reale di dimensione n. Compattezza dello spazio topologico prodotto di n spazi compatti. Uno spazio compatto e di Hausdorff è normale. Esempi.

Spazi connessi. Spazi topologici connessi (sconnessi): definizione e caratterizzazione. Sottoinsiemi connessi (sconnessi) di uno spazio topologico. Determinazione dei sottoinsiemi connessi di R. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso: proprietà e conseguenze. Il teorema del valor medio. Condizione sufficiente per la connessione dell'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi è connesso. Esempi di spazi connessi. Coppie di punti connessi in uno spazio topologico. La componente connessa individuata da un punto. Caratterizzazione degli spazi connessi in termini dell'esistenza di un'unica componente connessa. Proprietà delle componenti connesse. Determinazione delle componenti connesse di Q. Applicazioni della nozione di connessione: ogni intervallo del tipo [a,b) non è omeomorfo ad un intervallo del tipo (a, b); non esistenza di omeomorfismi tra R e R^2. Componenti connesse dei gruppi GL(n, R) e O(n).

Spazi connessi per archi. Spazi topologici connessi per archi: definizione ed esempi. Sottoinsiemi convessi di R^n Ogni convesso di R^n è connesso per archi. Esempio di sottospazio di R^n connesso per archi e non convesso. Ogni spazio connesso per archi è connesso. Esempio di spazio connesso e non connesso per archi. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso per archi: proprietà fondamentali e conseguenze. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è connesso per archi. Definizione e caratterizzazione di spazio localmente Euclideo di dimensione n. Esempi: la sfera di dimensione $n \geq 1$ e lo spazio proiettivo reale. Ogni spazio connesso, localmente Euclideo è connesso per archi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi per archi è connesso per archi.

Metodi di insegnamento:
Lezioni ed esercitazioni frontali

Supporti alla didattica: Materiale didattico reperibile all'indirizzo: https://sites.google.com/site/amedeoaltavilla/
Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame: Prova scritta e prova orale se possibile in sede, altrimenti on-line su piattaforma Microsoft Teams
Testi di riferimento principali: A. Loi: Introduzione alla topologia generale, Aracne Editrice, 2013. M. Manetti: Topologia, Springer-Verlag Italia, 2014. E. Sernesi: Geometria 2, Bollati Boringhieri, 1994. G. Campanella: Esercizi di topologia generale, Aracne Editrice, 1992.