

Teorema di Kronecker . Sistemi lineari. Teorema di Cramer e di Rouchè -Capelli. Sistemi lineari omogenei

Spazi e Sottospazi vettoriali

Spazi vettoriali su un campo K : proprietà ed esempi. Polinomi in una indeterminata. Lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo K . Lo spazio vettoriale delle matrici di tipo (m,n) su un campo K . Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Sottospazi vettoriali: proprietà ed esempi. Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali. Sottospazio intersezione. Sottospazio somma, sottospazio somma diretta e sottospazi supplementari. Caratterizzazione del sottospazio somma diretta. Sottospazio vettoriale generato da n vettori.

Spazi vettoriali finitamente generati e sistemi di generatori.

Lineare indipendenza e lineare dipendenza di vettori. Caratterizzazione della lineare dipendenza. Basi di uno spazio vettoriale e teorema di caratterizzazione. Teorema di completamento a una base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Esempi di spazi vettoriali di dimensione finita e di dimensione infinita. Dimensione di un sottospazio vettoriale. Teorema della dimensione di un sottospazio vettoriale (enunciato). Identità di Grassmann. Rango di un insieme di vettori. Teorema di esistenza di un supplementare di un sottospazio vettoriale. Cambiamento di base, matrice di passaggio e relative proprietà. Equazione del cambiamento di base.

Applicazioni lineari

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali, esempi e proprietà. Caratterizzazione delle applicazioni lineari. Lo spazio vettoriale $\text{Hom}_K(V,V')$. Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi. Gruppo degli automorfismi di uno spazio vettoriale. Applicazioni lineari e sottospazi vettoriali. Nucleo e immagine di una applicazione lineare. Teorema di esistenza ed unicità di una applicazione lineare (enunciato). Caratterizzazioni dei monomorfismi. Teorema della dimensione relativo ad applicazioni lineari (enunciato). Rango e nullità di una applicazione lineare. Caratterizzazioni degli isomorfismi. Spazi vettoriali isomorfi .

Forme lineari. Spazio duale e biduali di uno spazio vettoriale. Base duale di una base. Trasposta di una applicazione lineare.

La matrice associata ad una applicazione lineare. L'applicazione lineare associata ad una matrice. Isomorfismo tra gli spazi vettoriali $\text{Hom}_K(V,V')$ e $M_{(m,n)}(K)$.

Orientazioni di uno spazio vettoriale reale.

Matrici simili e relazione di similitudine. Matrici di un endomorfismo relative a due basi differenti. Autovalori, autovettori, autospazi rispettivamente di un endomorfismo e di una matrice. Molteplicità geometrica di un autovalore. Spettro di un endomorfismo. Lo spazio somma diretta degli autospazi relativi ad autovalori distinti . Polinomio caratteristico di una matrice. Relazioni tra matrici simili e polinomio caratteristico. Polinomio caratteristico ed equazione caratteristica di un endomorfismo. Autovalori come radici del polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica di un autovalore . Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Endomorfismi diagonalizzabili e matrici diagonalizzabili. Caratterizzazioni degli endomorfismi diagonalizzabili.

Forme bilineari

Applicazioni bilineari . Forme bilineari su uno spazio vettoriale e lo spazio vettoriale delle forme bilineari $\text{Bil}_K(V)$. Forme bilineari simmetriche e antisimmetriche. Matrice associata ad una forma bilineare. Isomorfismo tra gli spazi vettoriali $\text{Bil}_K(V)$ e $M_n(K)$. I sottospazi vettoriali $\text{Bil}_s(V)$ e $\text{Bil}_a(V)$. Matrici congruenti . Matrici associate ad una forma bilineare relative a due differenti basi. Rango di una forma bilineare. Forme bilineari non degeneri e degeneri. Caratterizzazione di forme bilineari non degeneri. Vettori ortogonali. Sottospazio vettoriale ortogonale ad un sottospazio. Nucleo e nullità di una forma bilineare simmetrica. Vettori isotropi e vettori non isotropi. Cono isotropo. Coefficiente di Fourier di un vettore. Basi ortogonali per una forma bilineare simmetrica. Forme bilineari simmetriche diagonalizzabili. Forme quadratiche. Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica su un campo arbitrario di caratteristica diversa da 2 e su un campo algebricamente chiuso (in particolare il campo complesso). Teorema di Sylvester e segnatura di una forma quadratica reale. Forme semidefinite, definite, indefinite.

Metodi di insegnamento:

Lezioni ed esercitazioni frontali

Supporti alla didattica:

Tutorato

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:

Prova scritta e orale. Esame congiunto con Geometria 2

Testi di riferimento principali:

E. Sernesi , Geometria I, Boringhieri.

M.I.Stoka ,Corso di Geometria , Cedam Padova

A. Facchini, Algebra e Matematica Discreta, Zanichelli

M. Abate C. De Fabritiis, Esercizi di Geometria, Mc. Graw-Hill.

De Bartolomeis, Algebra lineare, La Nuova Italia.