



**Varietà quasi complesse.** Strutture quasi complesse su varietà differenziabili. Riferimenti locali adattati a strutture quasi complesse. Orientabilità di una varietà quasi complessa.  $C^n$  come varietà quasi complessa. Campi vettoriali e forme differenziali di tipo (1,0) e (0,1). Decomposizione dell'algebra delle forme differenziali complesse. Tensore di Nijenhuis associato ad una struttura quasi complessa. Condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi del tensore di Nijenhuis.

**Varietà complesse.** Funzioni olomorfe ed equazioni di Cauchy-Riemann. Varietà complesse. Applicazioni olomorfe tra varietà complesse. Esempi: spazio proiettivo complesso,  $S^2$ , biolomorfismo tra  $S^2$  e  $CP^1$ , gruppi di Lie complessi. Struttura quasi complessa canonica su una varietà complessa. Campi vettoriali coordinati e forme duali. Teorema di Newlander-Nirenberg. Operatori differenziali su varietà complesse. Strutture complesse su superfici Riemanniane orientate. Caratterizzazioni di funzioni olomorfe. Campi vettoriali olomorfi e forme olomorfe. Campi vettoriali reali olomorfi.

**Varietà quasi Hermitiane.** Prodotto Hermitiano su uno spazio vettoriale complesso. Prodotto Hermitiano standard su  $C^n$ . Basi ortonormali e matrici unitarie. Parte reale e parte immaginaria di un prodotto Hermitiano. 2-forma fondamentale e J-basi ortonormali. Isomorfismo tra  $U(n)$  e un sottogruppo di  $SO(2n)$ . Estensioni  $C$ -lineari allo spazio complessificato di un prodotto Hermitiano e della 2-forma fondamentale associata.

Varietà quasi Hermitiane. Esistenza di metriche Hermitiane.  $C^n$  come varietà quasi Hermitiana. Riferimenti ortonormali locali. Non degeneratezza della 2-forma fondamentale. Connessione di Levi-Civita: derivata covariante della struttura quasi complessa e della 2-forma fondamentale. Tensore di Nijenhuis di una varietà quasi Hermitiana. Alcune classi di varietà quasi Hermitiane. Curvatura sezionale olomorfa per una varietà quasi Hermitiana.

**Varietà di Kähler.** Definizione e caratterizzazione di varietà di Kähler. Struttura Kähleriana su  $S^2$  e su superfici Riemanniane orientate. Proprietà della curvatura Riemanniana di una varietà di Kähler. Varietà di Kähler a curvatura sezionale costante. Varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante. Metriche Hermitiane in coordinate complesse. Caratterizzazione delle metriche di Kähler. Funzione potenziale per una metrica di Kähler. Metrica di Bergman sul disco complesso. Metrica di Fubini-Study sullo spazio proiettivo complesso. Teorema di classificazione delle varietà di Kähler a curvatura sezionale olomorfa costante.

**Varietà simplettiche.** Esistenza di basi canoniche per una forma bilineare antisimmetrica. Forme simplettiche su uno spazio vettoriale e spazi vettoriali simplettici. Basi simplettiche. Caratterizzazione delle forme simplettiche. Varietà quasi-simplettiche e simplettiche. Le varietà metriche quasi-Hermitiane come varietà quasi simplettiche. Struttura simplettica standard su  $R^{2n}$ . Teorema di Darboux per varietà simplettiche. Teorema di esistenza di una struttura quasi complessa metrica su una varietà simplettica.

**Varietà di quasi contatto e di contatto.** Elementi di contatto di una varietà. Struttura di contatto su una varietà come distribuzione di elementi di contatto. 1-forme che definiscono localmente e globalmente una struttura di contatto. La dimensione di una varietà munita di una struttura di contatto è dispari come conseguenza della decomposizione degli spazi tangenti. Orientabilità di una varietà munita di una struttura di contatto definita da una 1-forma globale. Struttura di contatto naturale su  $R^{2n+1}$ .  $(\varphi, \xi, \eta)$ -strutture e proprietà.

Metriche compatibili con una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura e proprietà; varietà di quasi contatto metriche. Esistenza di metriche compatibili su una varietà paracompatta dotata di una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura. Teorema sull'esistenza di una  $(\varphi, \xi, \eta)$ -struttura su una varietà di contatto, con dimostrazione tramite il Teorema di decomposizione polare. Definizione di normalità di una varietà di quasi contatto  $M$  tramite l'integrabilità di una struttura quasi complessa canonicamente definita su  $M \times R$ . I campi tensoriali  $N^1, N^2, N^3, N^4$ .

Una varietà di quasi contatto è normale se e solo se  $N^1=0$ . Rango di una struttura di quasi-contatto. Una ipersuperficie orientabile di una varietà quasi Hermitiana ammette una struttura di quasi contatto. Prodotto di almost contact manifolds secondo Morimoto e proprietà. Deformazioni D-omotetiche.

Definizione e rango una di varietà di contatto. Metriche compatibili e varietà di contatto metriche. Parallelismo del campo vettoriale di Reeb lungo se stesso rispetto alla connessione di Levi-Civita in una varietà di contatto metrica e controesempio per una varietà di quasi contatto metrica. Proprietà del campo tensoriale  $h$  nelle varietà di contatto metriche. Varietà di K-contatto e caratterizzazione. Definizione e caratterizzazione delle varietà cosimplettiche. Varietà di Sasaki e caratterizzazione. Struttura di Sasaki sulle sfere di dimensioni dispari.

**Questioni riguardanti la curvatura.** Alcune identità di curvatura nelle varietà di contatto metriche. Proprietà della curvatura  $\xi$ -sezionale delle varietà di K-contatto e teorema inverso. Caratterizzazione delle varietà di Sasaki tramite la curvatura. Proprietà del tensore di Ricci per le varietà di K-contatto. Teorema di Olszak sulle varietà metriche di contatto con curvatura sezionale costante. Varietà metriche di contatto tali che la curvatura verifichi l'identità  $R_{\chi\nu}\xi=0$  e teorema di decomposizione locale. Varietà di contatto di tipo  $(\kappa,\mu)$ . Autovalori del campo tensoriale  $h$  e distribuzione degli autospazi.  $\varphi$ -sezioni e curvatura  $\varphi$ -sezionale di una varietà Sasakiana. La curvatura di una varietà Sasakiana è determinata dalle curvatures  $\varphi$ -sezionali. Se la curvatura  $\varphi$ -sezionale non dipende dalla  $\varphi$ -sezione, allora non dipende dal punto. Varietà Sasakiane di curvatura  $\varphi$ -sezionale costante (Sasakian space forms). Le tre classi di Sasakian space form.

**Varietà quasi-Sasakiane.** Definizione di varietà quasi-Sasakiana e caratterizzazione di Kanemaki tramite un opportuno campo tensoriale di tipo  $(1,1)$ . Campo tensoriale indicatore. Caratterizzazione delle varietà Sasakiane e cosimpletliche tramite il campo tensoriale indicatore. Esempi di una struttura Sasakiana, una cosimpletlica una quasi-Sasakiana non Sasakiana né cosimpletlica su  $R^5$ .

**Metodi di insegnamento:**

Lezioni ed esercitazioni in aula

**Supporti alla didattica:**

Testi di riferimento

**Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:**

Prova orale

**Testi di riferimento principali:**

D. E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Second edition. Progress in Mathematics, 203. Birkäuser, Boston, 2010.

S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry. Interscience Publishers.

A. Moroianu, Lectures on Kähler geometry. London Mathematical Society Student Texts, 69. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.