Insegnamento di: Geometria Superiore 2

Classe di laurea: LM-40-Matematica	**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2017/2018	
Denominazione inglese insegnamento: Advanced Geometry 2	**Tipo di insegnamento:** Obbligatorio/A scelta in dipendenza dell'orientamento	**Anno:**	**Semestre:** 2

Tipo attività formativa:	**Ambito disciplinare:**	**Settore scientifico-disciplinare:**	**CFU totali:** 7
b - Attività caratterizzante	Formazione Teorica di base	MAT/03	di cui CFU lezioni: 6,5 CFU ese/lab/tutor: 0,5

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 52 ore di esercitazione/laboratorio/tutorato: 8
totale ore didattica assistita: 60
totale ore di studio individuale: 115

Lingua di erogazione: Italiano	**Obbligo di frequenza:** no		
Docente: Antonio Lotta	**Tel:** +390805442656 **e-mail:** antonio.lotta@uniba.it	**Ricevimento studenti:** Dip. Matematica piano II, stanza 7	**Giorni e ore ricevimento:** Su appuntamento

Conoscenze preliminari: Nozioni fondamentali riguardanti varietà differenziabili e gruppi di Lie Nozioni di base riguardanti le metriche Riemanniane: connessione di Levi-Civita, geodetiche, curvatura.

Obiettivi formativi:
Acquisizione di alcuni argomenti avanzati di Geometria Riemanniana, con particolare riferimento alla teoria degli spazi omogenei ed alcuni importanti risultati concernenti il legame tra curvatura e topologia.

Risultati di apprendimento previsti

Conoscenza e capacità di comprensione: Acquisizione di concetti fondamentali della geometria moderna su varietà Riemanniane. Acquisizione delle relative tecniche dimostrative.

Conoscenza e capacità di comprensione applicate: Le conoscenze teoriche acquisite si utilizzano in vasta parte della matematica e della fisica teorica.

Autonomia di giudizio: Capacità di comprendere e rielaborare dimostrazioni di risultati matematici significativi. Attitudine a testare alcuni fatti di carattere generale su esempi specifici.

Abilità comunicative: Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato, necessario per la consultazione e comprensione dei testi, l'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi.

Capacità di apprendere: Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi e rielaborazione personale delle tecniche proposte durante le lezioni.

Programma del corso

Spazi omogenei. Azioni differenziabili di gruppi di Lie su varietà. Campi vettoriali fondamentali. Azioni libere e proprie. Quoziente di una varietà per una relazione di equivalenza regolare: Teorema di Godement. Quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo chiuso. Esempi.

Teoria degli spazi omogenei Riemanniani. Varietà Riemanniane omogenee. Esempi. Rappresentazione di isotropia. Criterio di esistenza di metriche Riemanniane invarianti su uno spazio omogeneo. Teorema di esistenza di metriche biinvarianti su gruppi di Lie compatti. Spazi omogenei con rappresentazione di isotropia irriducibile. La connessione di Levi-Civita di una metrica invariante nel caso riduttivo. Campi di Killing e loro caratterizzazione. Formula di Nomizu per la curvatura di uno spazio riemanniano omogeneo riduttivo. Spazi omogenei naturalmente riduttivi. Metriche normali, Teorema di Samelson. Metriche invarianti su gruppi di Lie. Completezza geodetica degli spazi omogenei Riemanniani.

Isometrie di varietà Riemanniane compatte. Cenno al Teorema di Myers-Steenrod sul gruppo delle isometrie di una varietà Riemanniana. Dimensione massima del gruppo delle isometrie. Teorema della divergenza. Campi di Killing su varietà compatte: Teorema di Bochner. Applicazione al caso omogeneo.

Campi di Jacobi. Mappa esponenziale. Intorni normali. Palle geodetiche. Intorni uniformemente normali di un punto. Campi di Jacobi. Formula per il differenziale della mappa esponenziale. Il Lemma di Gauss.

Spazi localmente simmetrici e space forms. Simmetrie geodetiche. Caratterizzazione degli spazi Riemanniani localmente simmetrici. Teorema di Cartan sull'esistenza di isometrie locali tra spazi localmente simmetrici. Versione globale del Teorema di Cartan. Classificazione delle space forms (Teorema di Hopf).

Spazi simmetrici Riemanniani. Definizione di spazio simmetrico Riemanniano. Esempi. Rappresentazione canonica di uno spazio simmetrico Riemanniano come spazio omogeneo riduttivo; decomposizione di Cartan. Ogni spazio localmente simmetrico completo e semplicemente connesso è globalmente simmetrico. Formula per la curvatura e il tensore di Ricci. Spazi di tipo compatto e di tipo non compatto e segno delle curvature sezionali. Teorema di decomposizione per uno spazio simmetrico semplicemente connesso.

Curvatura e topologia. Nozione di distanza per una varietà Riemanniana connessa. Proprietà di minimizzazione delle geodetiche. Teorema di Hopf-Rinow. Teorema di Cartan-Hadamard. Teorema di Kobayashi sulla topologia delle varietà Riemanniane omogenee a curvatura non positiva e tensore di Ricci definito negativo. Teorema di Myers. Teorema di Frankel. Teorema di Weinstein.

Metodi di insegnamento: Lezioni ed esercitazioni in aula

Supporti alla didattica:

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame: Prova orale

Testi di riferimento principali:

1) S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry. Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
2) J.M. Lee: Riemannian manifolds. Graduate Texts in Mathematics 176, Springer-Verlag, New York, 1997.
3) B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, San Diego, 1983.
4) M. Postnikov: Geometry VI. Riemannian geometry. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 91, Springer-Verlag, Berlin, 2001.