Insegnamento di: Geometria Superiore 1			
Classe di laurea: LM-40	**Corso di Laurea in:** Matematica	**Anno accademico:** 2017/2018	
Denominazione inglese insegnamento: Advanced Geometry 1	**Tipo di insegnamento:** A scelta	**Anno:** 2	**Semestre:** 1

Tipo attività formativa: Attività caratterizzante	**Ambito disciplinare:** Formazione teorica di base	**Settore scientifico-disciplinare:** MAT/03	**CFU totali:** 7 di cui CFU lezioni: 6.5 CFU esercitazioni: 0.5

Modalità di erogazione, ore di didattica assistita ed ore dedicate allo studio individuale
ore di lezione: 52 ore di esercitazione: 8
totale ore didattica assistita: 60
totale ore di studio individuale: 115

Lingua di erogazione: Italiano	**Obbligo di frequenza:** no	

Docente: Maria Falcitelli	**Tel:** 39 0805442844 **e-mail:** maria.falcitelli@uniba.it	**Ricevimento studenti:** Dip. Matematica piano 3 , stanza 9	**Giorni e ore ricevimento:** Giovedì 11-13. In altri giorni previo appuntamento.

Conoscenze preliminari: Sono quelle acquisite per il conseguimento della laurea triennale in Scienze Matematiche. In particolare: algebra lineare, topologia generale, analisi matematica classica, geometria affine e proiettiva, primi elementi di geometria differenziale.

Obiettivi formativi: Acquisizione di concetti e metodiche basilari nell'ambito della Geometria Differenziale, in particolare della Geometria Riemanniana.

Risultati di apprendimento previsti	**Conoscenza e capacità di comprensione:** Acquisizione di nuove metodiche e di nuovi concetti utili per la comprensione di numerose tematiche moderne. **Conoscenza e capacità di comprensione applicate:** Le conoscenze e le metodiche acquisite si utilizzano in vari ambiti, sia della Matematica che della Fisica teorica. **Autonomia di giudizio:** Capacità di individuare metodiche utili per l'approfondimento della disciplina. **Abilità comunicative:** Acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico avanzato. **Capacità di apprendere:** Acquisizione di metodiche che favoriscano l'abilità a collegare concetti introdotti in altre discipline, nonché a risolvere nuovi problemi.

Programma del corso

Esempi di varietà differenziabili.

Spazi vettoriali reali di dimensione finita, con particolare riferimento a $\mathbf{R}^n$. La sfera $\mathbf{S}^n(r)$. Lo spazio proiettivo $P_n(\mathbf{R})$. Lo spazio iperbolico $\mathbf{H}^n_r$.

Campi tensoriali.

Tensori di tipo (r,s) e algebra dei tensori su uno spazio vettoriale. Tensori di tipo (r,s) in un punto di una verietà e campi tensoriali di specie (r,s) su M. Algebra tensoriale. Operazione di contrazione sui campi tensoriali. Algebra di Grassmann.

Derivazioni dell'algebra tensoriale

Definizione di derivazione dell'algebra tensoriale e proprietà di localizzabilità. Azione di una derivazione sulle 1-forme e sui campi tensoriali. Derivazione determinata da un campo tensoriale di specie (1; 1). Derivata di Lie rispetto a un campo vettoriale. Teorema di rappresentazione di una derivazione.

Connessioni lineari.

Definizione di connessione lineare su una varietà M. Derivata covariante di un campo tensoriale rispetto a una connessione. Connessione indotta su un aperto da una connessione su M. Proprietà di localizzabilità rispetto a una connessione. La connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Legame tra due connessioni su M. Derivata covariante di un campo vettoriale lungo una curva, rispetto a una connessione. Campi vettoriali paralleli e relative equazioni. Geodetiche rispetto a una connessione: definizione ed equazioni. Geodetiche rispetto alla connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Costruzione di una famiglia di connessioni avente le stesse geodetiche di una connessione assegnata. Trasporto parallelo lungo una curva. Esistenza di geodetiche di condizioni iniziali assegnate. Campo tensoriale di torsione di una connessione. Connessioni simmetriche. Campo tensoriale di curvatura di una connessione. Connessioni piatte. Identità del Bianchi.

Varietà Riemanniane.
Definizioni di metrica Riemanniana su una varietà e di varietà Riemanniana. Metrica indotta su una sottovarietà di una varietà Riemanniana. Esempi: la metrica canonica su $\mathbf{R}^n$ e la metrica indotta su $\mathbf{S}^n(r)$; struttura di varietà Riemanniana sullo spazio iperbolico $\mathbf{H}^n_r$. Prodotto scalare tra tensori di specie (r; s). Gradiente di una funzione. Traccia di un campo tensoriale di specie (1; 1). La connessione di Levi-Civita e i simboli di Christoffel. Calcolo dei simboli di Christoffel su $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{S}^n(r)$; $\mathbf{H}^n_r$. Trasporto parallelo su una varietà Riemanniana, come isometria. Isometrie tra varietà Riemanniane. Trasporto parallelo tra varietà isometriche. Distanza indotta da una metrica Riemanniana. Varietà complete e geodeticamente complete. Esempi. Metriche Riemanniane conformi e omotetiche, relazioni tra le corrispondenti connessioni di Levi-Civita.
Curvatura Riemanniana.
Campo tensoriale di curvatura Riemanniana e relative proprietà. Curvature sezionali. Varietà con curvatura sezionale puntualmente costante: definizione e caratterizzazione. Elicoide, come esempio di varietà a curvatura non costante. Lemma di Schür. Definizione ed esempi di space-forms. Classificazione degli space-forms completi e semplicemente connessi. Lo spazio proiettivo reale $P_n(\mathbf{R})$. La sfera $\mathbf{S}^n(1)$ come rivestimento Riemanniano di $P_n(\mathbf{R})$. Classificazione degli space-forms completi e semplicemente connessi. Campo tensoriale di Ricci e curvatura scalare. Varietà Riemanniane di Einstein: definizione ed esempi. Varietà di Einstein 3-dimensionali. Curvatura scalare di una varietà di Einstein.
Sottovarietà di una varietà Riemanniana.
Definizione di sottovarietà di una varietà Riemanniana. Campi vettoriali tangenti. Il fibrato normale e le sue sezioni. Esempio: il campo vettoriale normale alla sfera $\mathbf{S}^n(r)$. Equazione di Gauss. Seconda forma fondamentale. Equazione di Weingarten. La connessione normale. Operatori di Weingarten e legame con la seconda forma fondamentale. Campo tensoriale di curvatura media. Sottovarietà totalmente geodetiche, totalmente ombelicali e minimali. Caratterizzazione delle sottovarietà totalmente geodetiche. Curvature principali in un punto. Equazioni di Gauss e di Weingarten per ipersuperfici di $\mathbf{R}^{n+1}$. Esempi di ipersuperfici. Classificazione locale delle ipersuperfici totalmente ombelicali e non totalmente geodetiche in $\mathbf{R}^{n+1.}$ Equazioni di Gauss, Codazzi e Ricci per la curvatura. Alcune proprietà delle sottovarietà di uno spazio a curvatura costante deducibili dalle suddette equazioni.

Metodi di insegnamento: Lezioni ed esercitazioni frontali

Supporti alla didattica:

Controllo dell'apprendimento e modalità d'esame:
Prova orale

Testi di riferimento principali:
T. Aubin: A course in Differential Geometry, American Math. Soc.
B. Y. Chen: Geometry of submanifolds, Marcel Dekker
W. Klingenberg: Riemannian Geometry, Walter de Gruyter
S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, I, II, Interscience Publishers
G. Walschap: Metric structures in Differential Geometry, Springer.