

Programma Preliminare del corso di

Analisi Non Lineare

Laurea in Matematica

AA 2016/17

Prof.ssa **Anna Maria Candela**

Finalità del corso

Poiché molti problemi classici di Geometria e di Fisica Matematica si traducono in equazioni differenziali non lineari, scopo del corso è fornire gli strumenti di Analisi Funzionale che permettono, quando possibile, di ridurre lo studio di tali equazioni ad un problema variazionale, cioè alla ricerca di punti critici di funzionali su opportuni spazi di Banach. I teoremi astratti introdotti vengono applicati allo studio dell'esistenza di soluzioni per alcune classi di equazioni differenziali.

Programma

Spazi funzionali Richiami sugli spazi C^k e L^p . Elementi di teoria delle distribuzioni. Spazi di Sobolev e loro proprietà: teoremi di densità, di immersione, disuguaglianza di Poincaré.

Problemi lineari Elementi di teoria spettrale: spettro di operatori compatti e di operatori a risolvente compatto. Operatori simmetrici ed operatori autoaggiunti. Realizzazione autoaggiunta di Friedrichs. Realizzazioni autoaggiunte e studio delle relative proprietà spettrali per l'operatore di Laplace con dati al bordo omogenei di Dirichlet o di Neumann. Soluzioni deboli di problemi al contorno per equazioni ellittiche. Teoremi di regolarizzazione.

Calcolo differenziale su spazi di Banach Differenziale di Fréchet, di Gâteaux, teorema del differenziale totale. Proprietà ed esempi di funzionali differenziabili. Differenziali di ordine superiore. Punti critici e punti di massimo o minimo locale. Convergenza debole e teorema di Weierstrass in spazi di Banach.

Problemi differenziali non lineari Studio e proprietà dell'operatore di Nemytskii tra spazi di Sobolev. Soluzioni deboli e formulazione variazionale di alcuni problemi differenziali non lineari: funzionale dell'energia relativo ad alcuni problemi al contorno per equazioni ellittiche non lineari e funzionale dell'azione connesso allo studio di alcuni sistemi dinamici lagrangiani. Il principio di minima azione di Hamilton. Esistenza di soluzioni deboli mediante il teorema di Weierstrass.

Esempi Punti critici di funzionali su varietà e studio di alcuni problemi con vincoli: problemi al contorno ellittici non omogenei, sistemi dinamici su varietà e loro traiettorie congiungenti due dati punti, problemi agli autovalori non lineari.

Funzionali non limitati Equazioni differenziali connesse a funzionali non limitati. La condizione di Palais- Smale: esempi. Curve di massima pendenza e teorema di deformazione. Il teorema del passo montano ed applicazioni alla ricerca di punti critici di funzionali non limitati. Nozione di allacciamento e generalizzazioni del teorema del passo montano. Applicazioni allo studio di equazioni differenziali.

Testi consigliati

- R.A. Adams & J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces* (2nd Ed.), Academic Press, Amsterdam, 2003
- A. Ambrosetti & G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993
- H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011
- M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, 4rd Edition, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (4) **34**, Springer-Verlag, Berlin, 2008