Università degli Studi di Bari Aldo Moro

Programma di Geometria 4

A.A. 2016/17

Prof.ssa M. Falcitelli

Spazi topologici. Definizione di topologia su un insieme. Esempi: la topologia discreta, la topologia banale. Definizione di spazio topologico e di base. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnata base. Confronto tra topologie: il concetto di topologia meno fine di un'altra. Esempi. Intorni di un punto: definizione, esempi e proprietà. Sistema fondamentale di intorni di un punto: definizione e proprietà. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnato sistema fondamentale di intorni di ciascun punto. Il primo e il secondo assioma di numerabilità: definizione e legame tra i due concetti.

Spazi metrici. Definizione di spazio metrico. Esempi. Sfere aperte in uno spazio metrico: definizione, esempi e proprietà. Esistenza ed unicità della topologia indotta da un' assegnata distanza. Caratterizzazione degli intorni di un punto di uno spazio metrico. Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità. Distanze equivalenti. La distanza di un punto da un sottoinsieme: esempi e proprietà.

Sottoinsiemi di uno spazio topologico. Interno, esterno e frontiera di un sottoinsieme di uno spazio topologico. Caratterizzazione degli insiemi aperti. Proprietà della frontiera di un insieme. Insiemi chiusi: definizione, caratterizzazione, esempi e proprietà. La chiusura di un insieme. Legame tra la chiusura, la frontiera e l'esterno di un insieme. Una caratterizzazione degli insiemi chiusi. Determinazione esplicita della frontiera, della chiusura e dell'esterno di un disco aperto di uno spazio vettoriale Euclideo, munito della distanza indotta dalla funzione norma. Insiemi densi: definizione e caratterizzazione. Spazi topologici separabili. Ogni spazio che verifica il secondo assioma di numerabilità è separabile. Uno spazio metrizzabile e separabile verifica il secondo assioma di numerabilità.

Applicazioni continue, omeomorfismi. Applicazioni continue tra spazi topologici: definizione, caratterizzazioni, esempi e proprietà. Le topologie immagine inversa, immagine diretta di una topologia mediante un'applicazione. Esempi. Applicazioni aperte: definizione e caratterizzazione. Una proprietà delle applicazioni continue e aperte. Omeomorfismi: definizione, caratterizzazioni e proprietà. Il gruppo degli omeomomorfismi di uno spazio topologico. Proprietà topologiche. Esempi di omeomorfismi; la proiezione stereografica, le traslazioni di un gruppo topologico. La topologia naturale di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Incollamenti di applicazioni. Condizione per l'esistenza dell'incollamento di una famiglia di applicazioni. Condizione per la continuità dell'incollamento di una famiglia di applicazioni continue. Esempi.

Sottospazi. La topologia indotta su un sottoinsieme di uno spazio topologico: definizione e proprietà. Esempio: la topologia indotta dalla topologia naturale di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Z}$. Definizione di sottospazio. Sottospazi di uno spazio metrico, in particolare dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$. Insiemi convessi. Sottospazi ed applicazioni continue. Esempi di omeomorfismi tra sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

Prodotti, quozienti. La topologia prodotto di due topologie e lo spazio topologico prodotto. Esempi. Spazio topologico prodotto di n spazi e proprietà delle proiezioni su ciascun fattore. Caratterizzazione delle applicazioni continue a valori in uno spazio topologico prodotto. La topologia quoziente relativa ad un'applicazione. Identificazioni. Proprietà universale della topologia quoziente. Passaggio al quoziente di un'applicazione. Unicità dello spazio quoziente. La relazione di equivalenza associata ad un'identificazione. Esempi fondamentali di spazi quoziente: spazi proiettivi e, più in generale, spazi geometrici proiettivi reali. Proprietà topologiche delle coniche non degeneri del piano proiettivo. Insiemi saturi per una relazione di equivalenza. Ulteriori esempi: la circonferenza; il cilindro, il toro, il nastro di Möbius e relative parametrizzazioni in $\mathbb{R}^3$. Spazio che si ottiene da uno spazio topologico assegnato facendo collassare un sottoinsieme ad un punto. Gruppi topologici: definizione e proprietà elementari.

Proprietà di separazione. Assiomi di Frèchet e di Hausdorff: definizione e legame tra i due concetti. Esempi di spazi di Hausdorff: gli spazi metrizzabili, i sottospazi di uno spazio di Hausdorff. Unicità del limite di una successione di punti di uno spazio di Hausdorff. Spazi regolari, normali: definizione e legame tra i due concetti. Esempio di spazio T_3 che non è T_4; ogni spazio T_3 a base numerabile è T_4. Ogni spazio metrizzabile è normale. Applicazioni continue e assiomi di separazione. Catterizzazione degli spazi quoziente che sono di Hausdorff. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è uno spazio di Hausdorff.

Spazi compatti. Ricoprimenti aperti di uno spazio topologico. Spazi topologici compatti: definizione e caratterizzazione. Sottospazi compatti: definizione e proprietà. Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. Un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Applicazioni continue definite su uno spazio compatto: proprietà fondamentali e applicazioni. Esempio: l'applicazione antipodale e la compattezza dello spazio proiettivo reale di dimensione n. Compattezza dello spazio topologico prodotto di n spazi compatti. Uno spazio compatto e di Hausdorff è normale. Esempi. Compattificazione di Alexandroff di uno spazio e relative proprietà; esempi (cenni).

Spazi connessi. Spazi topologici connessi (sconnessi): definizione e caratterizzazione. Sottoinsiemi connessi (sconnessi) di uno spazio topologico. Determinazione dei sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso: proprietà e conseguenze. Il teorema del valor medio. Condizione sufficiente per la connessione dell'unione di una famiglia di di sottospazi connessi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi è connesso. Esempi di spazi connessi. Coppie di punti connessi in uno spazio topologico. La componente connessa individuata da un punto. Caratterizzazione degli spazi connessi in termini dell'esistenza di un'unica componente connessa. Proprietà delle componenti connesse. Determinazione delle componenti connesse di $\mathbb{Q}$. Cardinalità dell'insieme delle componenti connesse di un aperto di $\mathbb{R}^n$. Applicazioni della nozione di connessione: ogni intervallo del tipo $[a, b)$ non è omeomorfo ad un intervallo del tipo (a, b); non esistenza di omeomorfismi tra $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Componenti connesse dei gruppi $GL(n, \mathbb{R})$ e $O(n)$, connessione di $SL(n, \mathbb{R})$.

Spazi connessi per archi. Spazi topologici connessi per archi: definizione ed esempi. Ogni convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. Esempio di sottospazio di $\mathbb{R}^n$ connesso per archi e non convesso. Ogni spazio connesso per archi è connesso. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso per archi: proprietà fondamentali e conseguenze. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è connesso per archi. Esempio di spazio connesso non connesso per archi. Definizione e caratterizzazione di spazio localmente Euclideo di dimensione n. Esempio: la sfera di dimensione $n \geq 1$. Ogni spazio connesso, localmente Euclideo è connesso per archi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi per archi è connesso per archi.

Testi consigliati:

A. Loi: Introduzione alla topologia generale, Aracne Editrice, 2013.
M. Manettti: Topologia, Springer-Verlag Italia, 2014.
E. Sernesi: Geometria 2, Bollati Boringhieri, 1994.
G. Campanella: Esercizi di topologia generale, Aracne Editrice, 1992.