

Università degli Studi di Bari Aldo Moro
Programma del corso “Geometria 3”- A.A. 2016/17
Dott. A. Lotta

Spazi proiettivi. Spazi numerici proiettivi $\mathbb{K}P_n$. Punti proiettivamente indipendenti. Sottospazi; rette, piani, iperpiani. Sottospazio somma e intersezione di sottospazi. Formula di Grassmann proiettiva; applicazioni. Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio. Sistema lineare degli iperpiani contenenti un dato sottospazio. Trasformazioni proiettive di $\mathbb{K}P_n$. Gruppo delle trasformazioni proiettive di $\mathbb{K}P_n$. Punti in posizione generale e relativa caratterizzazione. Teorema di esistenza ed unicità per le trasformazioni proiettive. La nozione di spazio geometrico proiettivo su un campo \mathbb{K} . Sistemi coordinati; equazioni del cambiamento di coordinate omogenee. Campo ampliato con l'elemento all'infinito. Spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato ad uno spazio vettoriale e relativa struttura canonica di spazio geometrico proiettivo. Ampliamento proiettivo $S(\mathcal{A})$ di uno spazio affine \mathcal{A} con l'aggiunta delle direzioni: sistemi coordinati associati ad affinità $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}^n$ e relativa compatibilità; struttura canonica di spazio geometrico proiettivo su $S(\mathcal{A})$. Sistemi coordinati dedotti da riferimenti affini. Trasformazioni proiettive tra spazi geometrici proiettivi: caratterizzazione, proprietà, equazioni, teorema di esistenza ed unicità.

Sottospazi e duale di uno spazio geometrico proiettivo. Sottospazi di uno spazio geometrico proiettivo, equazioni cartesiane. Le trasformazioni proiettive trasformano sottospazi in sottospazi. Struttura di spazio geometrico proiettivo indotta su un insieme per trasporto mediante una bigezione. Struttura canonica di spazio geometrico proiettivo indotta su un sottospazio. Duale di uno spazio geometrico proiettivo. Sistemi lineari di iperpiani visti come sottospazi dello spazio duale. Esempi: fasci di rette, fasci di piani. Operazioni di proiezione e sezione. Caratterizzazione dei sottospazi proiettivi di $S(\mathcal{A})$ non contenuti nell'iperpiano all'infinito come ampliamenti $S(\mathcal{E})$ di sottospazi affini. Legame tra le equazioni di un sottospazio affine e quelle del suo ampliamento proiettivo.

Geometria proiettiva in una dimensione. Coordinata proiettiva non omogenea; casi particolari rilevanti. L'equazione bilineare di una trasformazione proiettiva tra rette. Birapporto. Quaterne armoniche. Caratterizzazione delle trasformazioni proiettive tra rette come bigezioni che conservano i birapporti. Trasformazioni proiettive che trasformano una quaterna ordinata di punti distinti in un'altra. Proiettività ellittiche, paraboliche, iperboliche. Involuzioni. Punti uniti di una proiettività. Invariante assoluto. Esistenza ed unicità della proiettività iperbolica di assegnati punti uniti e assegnato invariante assoluto. L'involuzione circolare su un fascio proprio di rette nell'ampliamento proiettivo di un piano Euclideo. Involuzione su una retta Euclidea di centro un punto proprio e potenza assegnata.

Iperquadriche proiettive. Richiami su forme quadratiche e forme bilineari simmetriche: segnatura, radicale. Iperquadriche di uno spazio geometrico proiettivo di dimensione $n \geq 1$. Coniche e quadriche. Cambiamento dell'equazione al variare del sistema coordinato; criterio di uguaglianza. Rango. Immagine di un'iperquadrica mediante una trasformazione proiettiva. Classificazione proiettiva delle iperquadriche nel caso complesso. Dimensione massima di un sottospazio contenuto in una iperquadrica non degenera

complessa. Indice di una iperquadrica di uno spazio proiettivo reale e suo significato geometrico. Teorema di classificazione nel caso reale. Caso delle coniche e delle quadriche. Definizione di quadrica ellittica e quadrica iperbolica. Intersezione tra un'iperquadrica ed un sottospazio; posizioni reciproche retta-iperquadrica.

Punti singolari di un'iperquadrica. Punti singolari di un'iperquadrica, radicale. Caratterizzazione delle iperquadriche che coincidono col proprio radicale. Struttura delle iperquadriche degeneri che non coincidono col proprio radicale: conoidi e coni quadrici. Esempi in dimensione due e tre.

Polarità. Punti coniugati rispetto a un'iperquadrica. Iperpiano polare di un punto non singolare. La polarità definita da un'iperquadrica non degenera come trasformazione proiettiva. Discussione dell'intersezione tra una iperquadrica e l'iperpiano polare di un punto. Iperpiani tangenti. Tangenti condotte da un punto ad una conica. Punti ellittici e punti iperbolici di una quadrica reale non degenera. L'involuzione dei punti coniugati su una retta secante o esterna ad un'iperquadrica. Rette coniugate rispetto ad una conica, involuzione delle rette coniugate per un punto.

Proprietà affini delle iperquadriche. Centro di un'iperquadrica dell'estensione proiettiva di uno spazio affine. Iperquadriche a centro. Definizione di ellisse, iperbole, parabola; caratterizzazioni. Diametri di una conica, diametri coniugati. Asintoti di un'iperbole. L'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati. Definizione di ellissoide, iperboloidi e paraboloidi. Estensione canonica di un'affinità ad una trasformazione proiettiva. Identificazione tra il gruppo delle affinità ed il gruppo delle proiettività che conservano l'iperpiano all'infinito. Nozione di iperquadrica affine e relativa chiusura proiettiva. Corrispondenza biunivoca tra iperquadriche affini e iperquadriche proiettive che non contengono l'iperpiano all'infinito. Criterio di equivalenza affine per le iperquadriche non degeneri. Posizione reciproca tra un iperpiano e un'iperquadrica non degenera: iperpiani esterni, secanti, trasversali, tangenti. Equazioni canoniche delle iperquadriche affini non degeneri. Caso delle coniche e delle quadriche. Cenni riguardanti la polarità rispetto a quadriche degeneri. Le equazioni canoniche delle coniche degeneri e delle quadriche degeneri; coni e cilindri. Metodi pratici per classificare proiettivamente o affinemente una conica ovvero una quadrica reale. Struttura di spazio geometrico proiettivo sull'insieme delle iperquadriche; nozione di fascio di iperquadriche. Tipi di fasci di coniche.

Proprietà metriche delle iperquadriche. Ipersfere come iperquadriche affini di uno spazio Euclideo. Iperpiani principali o di simmetria ortogonale di un'iperquadrica non degenera. Assi di una conica e vertici. Equazione di una conica a centro riferita ai propri assi. Equazione di una parabola in un riferimento avente per assi il suo asse e la polare del vertice. Fuochi di una conica. Eccentricità. Piani principali di una quadrica, quadriche rotonde.

Testi consigliati:

M.C. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G.M. Bragadin: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri.

M. Berger: *Geometry II*, Universitext, Springer-Verlag.

E. Sernesi: *Geometria 1*, Bollati Boringhieri.

E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini: *Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria*, Springer-Verlag.