

Programma di Geometria 1
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016-2017 - Prof.^{ssa} Oriella Maria AMICI

Strutture algebriche

Legge di composizione interna su un insieme e struttura algebrica. Insieme chiuso rispetto ad una legge di composizione interna. Gruppi e sottogruppi. Esempi. Anelli, divisori dello zero, dominio di integrità, campi, sottocampi. Esempi. Omomorfismi tra gruppi. Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi. Nucleo ed immagine di un omomorfismo. Omomorfismi ed isomorfismi tra campi. Il campo dei numeri complessi e il campo dei numeri reali come sottocampo del campo dei complessi. Caratteristica di un campo.

Matrici e sistemi lineari

Matrici a coefficienti in un campo. Operazioni tra matrici. Trasposta di una matrice. Matrici diagonali, simmetriche e antisimmetriche. Matrici invertibili e matrice inversa. Il gruppo delle matrici invertibili e suoi sottogruppi. Determinante di una matrice quadrata e proprietà dei determinanti. Calcolo di determinante secondo Laplace Teorema di Binet. Determinazione della matrice inversa di una matrice invertibile. Rango per righe e rango per colonne di una matrice. Rango di una matrice e relative proprietà. Minori di una matrice e loro relazione col rango. Teorema di Kronecker. Sistemi lineari. Teorema di Cramer e di Rouchè-Capelli. Sistemi lineari omogenei.

Spazi e sottospazi vettoriali

Spazi vettoriali su un campo K , proprietà ed esempi. Lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo K . Lo spazio vettoriale delle matrici di tipo (m,n) su un campo K . Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Sottospazi vettoriali ed esempi. Caratterizzazione dei sottospazi vettoriali. Sottospazio intersezione. Sottospazio somma, sottospazio somma diretta e sottospazi supplementari. Caratterizzazione del sottospazio somma diretta. Sottospazio vettoriale generato da n vettori.

Spazi vettoriali finitamente generati e sistemi di generatori.

Lineare indipendenza e lineare dipendenza di vettori. Caratterizzazione della lineare dipendenza. Basi di uno spazio vettoriale e teorema di caratterizzazione. Teorema di completamento a una base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Esempi di spazi vettoriali di dimensione finita e di dimensione infinita. Dimensione di un sottospazio vettoriale. Teorema della dimensione di un sottospazio vettoriale (enunciato). Identità di Grassmann. Rango di un insieme di vettori. Teorema di esistenza di un supplementare di un sottospazio. Cambiamento di base, matrice di passaggio e relative proprietà. Equazione del cambiamento di base.

Applicazioni lineari

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Caratterizzazione delle applicazioni lineari e proprietà. Esempi. Lo spazio vettoriale $\text{Hom}_K(V,V')$. Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi. Struttura algebrica dell'insieme degli endomorfismi di V e gruppo degli automorfismi di V . Applicazioni lineari e sottospazi vettoriali. Nucleo e immagine di una applicazione lineare. Teorema di esistenza ed unicità di una applicazione lineare (enunciato). Caratterizzazione dei monomorfismi. Teorema della dimensione relativo ad applicazioni lineari (enunciato). Rango e nullità di una applicazione lineare. Caratterizzazione degli isomorfismi. Spazi vettoriali isomorfi. Spazio duale e biduali di uno spazio vettoriale. Base duale di una base. Trasposta di una applicazione lineare. Matrice

associata ad una applicazione lineare. Isomorfismo tra gli spazi $\text{Hom}_K(V, V')$ e $M_{(m,n)}(K)$. Caratterizzazione di isomorfismi tramite matrici associate.

Orientazioni di uno spazio vettoriale reale.

Matrici simili e relazione di similitudine. Matrici simili e matrici di endomorfismo per cambiamento di base.

Autovalori, autovettori, autospazi di un endomorfismo e di una matrice. Molteplicità geometrica di un autovalore. Spettro di un endomorfismo. Lo spazio somma diretta degli autospazi relativi ad autovalori distinti. Polinomio caratteristico di una matrice. Relazioni tra matrici simili e polinomio caratteristico. Polinomio caratteristico ed equazione caratteristica di un endomorfismo. Autovalori come radici del polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica di un autovalore. Relazione tra molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Endomorfismi diagonalizzabili e matrici diagonalizzabili. Caratterizzazioni degli endomorfismi diagonalizzabili.

Forme bilineari

Applicazioni bilineari. Forme bilineari su uno spazio vettoriale e lo spazio vettoriale delle forme bilineari $\text{Bil}_K(V)$. Forme bilineari simmetriche e antisimmetriche. Matrice associata ad una forma bilineare. Isomorfismo tra gli spazi vettoriali $\text{Bil}_K(V)$ e $M_n(K)$. I sottospazi vettoriali $\text{Bil}_s(V)$ e $\text{Bil}_a(V)$. Matrici congruenti. Matrici associate ad una forma bilineare per cambiamento di base. Rango di una forma bilineare. Forme bilineari non degeneri e degeneri. Caratterizzazione di forme bilineari non degeneri. Vettori ortogonali. Sottospazi ortogonali. Nucleo e nullità di una forma bilineare simmetrica. Vettori isotropi e vettori non isotropi. Coefficiente di Fourier di un vettore. Basi ortogonali per una forma bilineare simmetrica. Forme bilineari simmetriche diagonalizzabili. Forme quadratiche. Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica. Teorema di Sylvester e segnatura di una forma quadratica reale. Cono isotropo.

TESTI DI RIFERIMENTO:

- E. Sernesi, Geometria I, Ed. Boringhieri;
- M.I. Stoka, Corso di Geometria, Ed. Cedam, Padova;
- A. Facchini, Algebra e Matematica Discreta, Ed. Zanichelli;
- M. Abate C. De Fabritiis, Esercizi di Geometria, Mc. Graw-Hill;
- De Bartolomeis, Algebra lineare, La Nuova Italia.