

## Programma di Analisi Matematica 1

### **Preliminari.**

Generalità sugli insiemi. Inclusione, unione, intersezione, complementare e prodotto cartesiano. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive. Funzioni composte, funzioni invertibili e loro inverse.

Relazioni d'ordine, massimo, minimo, minorante e maggiorante, estremo superiore ed estremo inferiore e loro proprietà caratteristiche. Numeri naturali  $\mathbb{N}$ , interi  $\mathbb{Z}$ , razionali  $\mathbb{Q}$  e loro strutture. Principio di induzione. Campi ordinati. Costruzione di  $\mathbb{R}$ . Il campo ordinato completo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  e sue proprietà. Densità di  $\mathbb{Q}$  e del suo complementare in  $\mathbb{R}$ .  $\mathbb{R}$  è archimedeo. Insiemi finiti, infiniti, numerabili. Binomio di Newton. Disuguaglianza di Bernoulli. Valore assoluto, struttura metrica e intervalli di  $\mathbb{R}$ . Insiemi connessi. Punti di accumulazione ed insiemi chiusi. Numeri complessi.

Funzioni limitate. Monotonia, simmetrie e periodicità di una funzione. Costruzione di alcune funzioni elementari, proprietà e grafici. Operazioni elementari sui grafici di funzione. Disequazioni intere, razionali, irrazionali e trascendenti.

### **Successioni numeriche**

Successioni regolari e loro limiti. Operazioni con successioni regolari e loro limiti. Ogni successione convergente è limitata. Teorema della conservazione delle disuguaglianze per successioni. Teorema della convergenza obbligata e di confronto per successioni. Teorema sul limite delle successioni monotone. Numero di Nepero. Successioni estratte da una successione. Teorema sul limite delle successioni estratte. Massimo e minimo limite di una successione e loro proprietà caratteristiche. Valori di aderenza di una successione. Teorema: il massimo (risp. il minimo) limite di una successione è il più grande (risp. il più piccolo) valore di aderenza della successione. Teorema di Bolzano-Weierstrass: da ogni successione numerica limitata si può estrarre una convergente. Insiemi compatti di  $\mathbb{R}$  e loro caratterizzazione. Successioni di Cauchy, criterio di convergenza di Cauchy. Criterio del rapporto per limiti di successioni. Criteri di Cesaro (media aritmetica e geometrica, radice ennesima). Successioni definite per ricorrenza.

### **Serie numeriche.**

Definizione e prime generalità sulle serie. La serie di Mengoli. Le serie telescopiche. La serie geometrica. Applicazione alla rappresentazione decimale dei numeri reali. La serie armonica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Criterio di Cauchy per serie. Il carattere di una serie non cambia alterandone un numero finito di termini. Serie a termini non negativi. Criteri di confronto. Criterio del confronto asintotico. La serie armonica generalizzata. Criterio degli infinitesimi. Criterio della radice, criterio del rapporto. Serie assolutamente convergenti. Serie a segno alterno. Criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno. La serie armonica a segno alterno. Il prodotto alla Cauchy di due serie (cenni). Riordinamenti di serie assolutamente convergenti. Prodotti infiniti (cenni). Successioni e serie in campo complesso (cenni).

### **Limiti di funzioni**

Limiti di funzioni e primi teoremi sui limiti. Legami tra i limiti delle funzioni e limiti delle successioni. Limiti a sinistra, a destra. Limiti di funzioni monotone. Teorema: ogni funzione convergente in  $x_0$  è localmente limitata. Teorema della permanenza del segno e corollari. Teorema della convergenza obbligata e del confronto. Limiti

delle funzioni elementari. Limiti notevoli. Infiniti e infinitesimi. Principio di eliminazione di termini trascurabili. Asintoti.

### **Funzioni continue (I)**

Funzioni continue e loro proprietà elementari. Punti di salto, oscillazioni, prolungamento per continuità. Definizione di funzione sequenzialmente continua. Teorema di Weierstrass. Teorema di Bolzano. Corollario: ogni funzione continua manda intervalli in intervalli. Esistenza della radice ennesima di numeri reali. Continuità dell'inversa di una funzione continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  intervallo oppure  $A$  chiuso e limitato.

## Programma di Analisi Matematica 2

### **Funzioni continue (II)**

Definizione di funzione sequenzialmente continua. Funzioni semicontinue inferiormente, funzioni semicontinue superiormente. Teorema di Weierstrass generalizzato. Uniforme continuità e teorema di Cantor. Funzioni lipschitziane. Funzioni Hölderiane.

### **Calcolo differenziale**

Derivata di una funzione di variabile reale. Esempi di natura geometrica e cinematica. Primi teoremi sulle funzioni derivabili, continuità delle funzioni derivabili. Teorema sulla derivata di funzioni composte e della funzione inversa. Derivabilità delle funzioni elementari. Retta tangente ad un grafico. Punti di massimo e minimo locale, punti critici e teorema di Fermat. Proprietà delle funzioni derivabili in un intervallo: teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange. Criteri di monotonia. Funzioni a derivata nulla. Teorema di de l'Hospital.

Formula di Taylor col resto di Peano e di Lagrange, condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o minimi locali. Sviluppi di Taylor per funzioni elementari. Relazione tra gli sviluppi di Taylor e la somma di una serie (cenni).

Funzioni convesse su intervalli. Regolarità delle funzioni convesse. Funzioni convesse derivabili, definizione e proprietà.

Studio del grafico di una funzione.

### **Calcolo integrale**

Teoria dell'integrazione secondo Riemann di funzioni di variabile reale. Plurirettangoli, area del rettangoloide. Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue. Proprietà dell'integrale di Riemann e teorema della media. Integrale definito e funzioni integrali. Primitive ed integrale indefinito. Teorema di esistenza di primitive di funzioni continue e teorema fondamentale del calcolo integrale. Prime applicazioni del teorema fondamentale del calcolo integrale a problemi di geometria e di meccanica.

Metodi di calcolo degli integrali indefiniti per funzioni razionali. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione.

Integrali generalizzati: integrazione di una funzione su una semiretta, o di una funzione illimitata su un intervallo limitato. Principio del confronto. Il criterio dell'integrale per le serie numeriche. Convergenza e assoluta convergenza. La funzione  $\Gamma$  di Eulero (cenni).

### **Testi consigliati:**

- P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica uno*, Liguori Editore.
- E. Acerbi, G. Buttazzo, *Primo corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editore.
- P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica, vol. I Parte 1, Parte 2*, Liguori Editore.
- A. Alvino, L. Carbone, G. Trombetti, *Esercitazioni di Matematica I/1,2*, Liguori Editore.
- Alcune dispense sulla pagina web della Dott.ssa S. Lucente.