

Analisi Funzionale
Laurea in Matematica
Prof. Giuseppe Maria COCLITE
Anno Accademico 2016/2017

Spazi di dimensione finita. Equivalenza delle norme definite In uno spazio di dimensione finita. Caratterizzazione degli spazi di dimensione finita come spazi in cui ogni sfera chiusa è compatta.

Aspetti geometrici del Teorema di Hanh-Banach. Teorema di Hanh-Banach. Funzionale o di Minkowski. Separazione di due punti di uno spazio normato mediante un iperpiano. Separazione di due insiemi convessi di uno spazio normato mediante iperpiani.

Operatori lineari limitati. Richiamo dei teoremi di Banach-Steinhaus, dell'applicazione aperta, del grafico chiuso. Continuità degli operatori limite puntuale. Non limitatezza dell'operatore di derivazione nello spazio delle funzioni continue limitate su \mathbb{R} .

Definizione e proprietà degli operatori aggiunti. Operatori compatti. Compattezza degli operatori lineari limitati con rango di dimensione finita. Compattezza di operatori lineari limite in norma di operatori lineari compatti. Compattezza dell'aggiunto di un operatore lineare compatto.

Topologie deboli. Spazi riflessivi. Spazi separabili. Spazi uniformemente convessi. Costruzione della più fine delle topologie (topologia debole) che per cui un insieme di applicazioni sono continue. Caratterizzazione della convergenza di una successione in uno spazio munito della topologia debole. Caratterizzazione della continuità in uno spazio munito della topologia debole.

La topologia debole $\sigma(E, E^*)$. Separatezza di $\sigma(E, E^*)$. Basi di intorni in $\sigma(E, E^*)$. Caratterizzazione e proprietà della convergenza debole. Coincidenza delle topologie forte e debole in uno spazio di dimensione finita. Confronto della topologia forte e debole in uno spazio di dimensione infinita. Equivalenza della chiusura debole e forte di un insieme convesso (enunciato). Debole semicontinuità di operatori convessi fortemente semicontinui (enunciato). Continuità debole di operatori lineari fortemente continui.

La topologia debole star $\sigma(E^*, E)$. Separatezza di $\sigma(E^*, E)$. Basi di intorni in $\sigma(E^*, E)$. Caratterizzazione e proprietà della convergenza debole star. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki.

Spazi riflessivi. Debole sequenziale compattezza degli spazi riflessivi. Debole compattezza di insiemi chiusi convessi in uno spazio riflessivo. Spazi separabili. Invarianza per dualità della riflessività e separabilità (enunciato). Relazione fra separabilità e metrizzabilità. Spazi uniformemente convessi. Teorema di Milman-Pettis Caratterizzazione della convergenza forte in spazi uniformemente convessi.

Operatori definiti in Spazi di Hilbert. Richiami sugli spazi di Hilbert. Teorema di invertibilità degli operatori definiti positivi. Teorema di Lax-Milgram. Debole sequenziale compattezza degli spazi hilbertiani.

Operatori compatti su uno spazio di Hilbert. Teorema di Fredholm. Spettro di un operatore compatto. Limitazioni dello spettro di un operatore simmetrico. Teorema di Hilbert-Schmidt sugli autovettori di un operatore compatto e simmetrico.

Semigruppì di operatori Lineari. Funzioni fortemente misurabili a valori in uno spazio di Banach. Teorema di Pettis. Funzioni sommabili a valori in uno spazio di Banach. Integrale di Bochner. Problema di Cauchy in spazi di Banach. Mild solution. Teorema di esistenza e unicit  della mild solution. Problema di Cauchy lineare omogeneo in spazi di Banach. Esempi di operatori non limitati che generano "semigruppì". Regolarizzazione delle mild solution. Semigruppì fortemente continui, di tipo ω -contrattivi. Generatore di un semigruppì. Propriet  dei semigruppì. Densit  del dominio di un generatore in tutto lo spazio. Chiusura del generatore di un semigruppì. Operatore risolvete. Propriet  dell'operatore risolvete di un operatore chiuso. Rappresentazione integrale dell'operatore risolvete di un generatore di semigruppì. Esistenza e unicit  del semigruppì associato ad un operatore chiuso e densamente definito.

Introduzione agli Spazi di Sobolev. Distribuzioni. Mollificatori. Mollificatori. Funzioni assolutamente continue. Spazi di Sobolev. Spazi di Sobolev omogenei. Prima disuguaglianza di Poincar . Densit  in spazi di Sobolev. Esercizi. Teorema di Rademaker. Teorema di estensione. Disuguaglianza di Morrey. Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. Immersioni compatte. Teorema di Rellich-Kondrachov. Seconda disuguaglianza di Poincar . Derivabilit  quasi ovunque. Tracce.

Cenni sulle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali. Operatori uniformemente ellittici. Problema di Dirichlet. Equazione di Helmholtz. Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche con i soli termini del secondo ordine: esistenza, unicit  e sviluppo in serie di autofunzioni. Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche generali. Lemmi di Stampacchia sulla regolarit  L^p . Problema di Dirichlet per equazioni paraboliche con i soli termini del secondo ordine: esistenza e sviluppo in serie di autofunzioni. Problema di Dirichlet per equazioni paraboliche generali. Problema di Dirichlet per equazioni iperboliche con i soli termini del secondo ordine. Funzioni BV. Leggi di conservazione.

TESTI DI RIFERIMENTO

- [1] H. Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2011.
- [2] A. Bressan: Lecture Notes on Functional Analysis with Applications to Linear Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2013.