Istituzioni di Analisi Superiore n. 2
Programma A.A. 2016–2017
titolare del corso: prof. Enrico Jannelli
collabora: Dott. Marcello D'Abbicco

Analisi reale

1. **Misure in spazi prodotto:** – i teoremi astratti di Halmos e Hahn Kolmogorov – la misura prodotto – il teorema di Fubini–Tonelli – il prodotto di convoluzione – il teorema di Young – il supporto della convoluzione – regolarità della convoluzione – le successioni approssimanti dell'unità – convergenza in L^p, puntuale e uniforme del prodotto con approssimanti dell'unità – la delta di Dirac come unità del prodotto di convoluzione – il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

2. **Trasformata di Fourier:** definizione, prime proprietà della trasformata di Fourier – il teorema di inversione in L^1 – calcolo della trasformata di Fourier di importanti nuclei di convoluzione – comportamento della trasformata rispetto alla derivazione – applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie – lo spazio $\mathcal{S}$ – la trasformata di Fourier nello spazio $\mathcal{S}$ – trasformata di Fourier in L^2: il teorema di Plancherel – Teorema di Riesz Thorin (solo enunciato)– la trasformata di Fourier in L^p – equazione di Laplace nel semipiano – equazione del calore – equazione di Schrödinger – equazione delle onde.

Analisi funzionale

3. **Teoria elementare degli spazi di Banach:** definizione, equivalenza fra continuità e limitatezza per funzionali lineari – il teorema di Baire – il teorema di Banach-Steinhaus – il teorema dell'applicazione aperta – alcuni aspetti delle serie di Fourier in spazi diversi da L^2 – il teorema di Hahn-Banach.

4. **La convergenza debole (I):** spazio duale di uno spazio normato – spazio biduale – spazi riflessivi – relazioni fra separabilità di uno spazio e separabilità del suo duale – definizione di convergenza debole e di convergenza debole $*$ – proprietà elementari dei limiti deboli – insiemi debolmente limitati – teoremi di compattezza rispetto alla convergenza debole $*$ e alla convergenza debole.

5. **La convergenza debole (II):** semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole – cenni sugli spazi uniformemente convessi – convessità e convergenza debole – debole semicontinuità per funzionali convessi – un teorema di minimo per funzionali convessi – immersioni continue e compatte per gli spazi $H^s(T)$ e $H^s(T^N)$.

Distribuzioni e spazi di Sobolev

6. **Introduzione alle distribuzioni:** lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ – definizione e prime proprietà delle distribuzioni, ordine di una distribuzione – le funzioni L^1_{loc} come distribuzioni – operazioni sulle distribuzioni: somma, derivazione, moltiplicazione per funzioni test – supporto di una distribuzione – lo spazio $\mathcal{E}(\Omega)$ – ordine di una distribuzione, ogni distribuzione è localmente di ordine finito – le distribuzioni a supporto compatto – convoluzione fra funzioni e distribuzioni – convoluzione fra distribuzioni – il concetto di soluzione fondamentale – soluzione fondamentale dell'operatore $-\Delta$ – lo spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate – le funzioni a crescenza lenta – trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate – esempi di calcolo della trasformata di Fourier di distribuzioni temperate – trasformata di Fourier a simmetria radiale.

7. **Spazi di Sobolev:** definizione di $W^{m,p}(\Omega)$ e di $H^m(\Omega)$ – completezza degli spazi di Sobolev – definizione di $W^{m,p}_0(\Omega)$ e di $H^m_0(\Omega)$ – Teorema $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}_0(\mathbb{R}^N)$ – definizione di spazi $H^s(\mathbb{R}^N)$, $s > 0$ – teoremi di immersione: $H^s(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$ – la disuguaglianza di Poincaré – spazi di Sobolev su intervalli: immersione continua per le funzioni $W^{1,p}(I)$ in $L^\infty(I)$ – teorema di Ascoli Arzelà– immersione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $\mathcal{C}(I)$ – teoremi di immersione continua per gli spazi $W^{m,p}$ (solo enunciati) – cenni su operatori di prolungamento – teoremi di Rellich per spazi $W^{m,p}$ (solo enunciato) – necessità degli esponenti critici. – lo spazio $W^{-m,p'}(\Omega)$ come duale di $W^{m,p}_0(\Omega)$ – alcuni esempi di problemi variazionali ambientati in spazi di Sobolev: problema per $-\Delta$ e $-\Delta+I$ con condizioni di Dirichlet e di Neumann – un problema nonlineare – gli autovalori del laplaciano – Identità di Pohozaev.

Testi consigliati:

H. BREZIS – **Analisi funzionale** – Ed. Liguori

G. GILARDI – **Analisi 3** – Ed. Mc Graw-Hill

S. KESAVAN – **Functional Analysis and Applications** – Ed. J. Wiley & Sons

W. RUDIN – **Analisi reale e complessa** – Ed. Boringhieri

S. SALSA – **Equazioni a derivate parziali.** Ed. Springer-Verlag Italia

Si vedano, inoltre, le dispense del prof. Jannelli all'indirizzo web
http://www.dm.uniba.it/ jannelli/didattica/analisi3/analisi3.htm
e le dispense del dott. D'Abbicco sul sito dabbicco.com