

Programma di Metodi Matematici della Fisica

Laurea magistrale in Matematica

Prof. Paolo Facchi

Il corso consiste nello studio delle equazioni classiche della fisica matematica: equazione del trasporto, di Laplace, del calore, delle onde e di Hamilton-Jacobi. Particolare enfasi viene data alla formulazione di ciascun problema matematico a partire dai corrispondenti problemi fisici. Delle equazioni studiate nel corso, in casi semplici, verrà costruita la soluzione esplicita e se ne discuteranno le sue proprietà qualitative.

Il programma si articola nei seguenti argomenti.

1. Equazione del trasporto

Equazione del trasporto con coefficienti costanti. Soluzione generale e rette caratteristiche. Problema ai valori iniziali. Soluzioni deboli. Problema non omogeneo. Studio di un modello per l'equazione del trasporto e di Burgers. Generalità sulle leggi di conservazione scalari. Shock e soluzioni entropiche.

2. Equazione di Laplace

Richiami di elettrostatica e interpretazione fisica. Funzioni armoniche. Soluzione fondamentale in \mathbb{R}^n . Formula di rappresentazione dell'equazione di Poisson. Teorema del valor medio. Principio di massimo. Teorema di unicità. Regolarità. Stima delle derivate. Teorema di Liouville. Analiticità. Disuguaglianza di Harnack. Funzioni di Green e formula di rappresentazione del problema di Poisson con condizioni al bordo. Simmetria della funzione di Green e principio di reciprocità. Funzione di Green del semispazio e della sfera. Formule di Poisson. Metodi energetici, unicità e principio di minimo di Dirichlet.

3. Equazione del calore

Equazione della conduzione termica. Interpretazione fisica. Soluzione fondamentale in \mathbb{R}^n . Problema di Cauchy e formula di rappresentazione. Problema non omogeneo e principio di Duhamel. Cilindro parabolico e palla di calore. Teorema del valor medio. Principio di massimo. Teorema di unicità in domini limitati. Principio di massimo in \mathbb{R}^n e unicità del problema di Cauchy. Regolarità. Stima delle derivate. Metodi energetici, unicità nel futuro e nel passato.

4. Equazione delle onde

Derivazione euristica e interpretazione fisica. Soluzione dell'equazione d'onda in una dimensione. Formula di D'Alembert. Equazione d'onda sulla semiretta. Metodo di riflessione. Medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux. Problema di Cauchy in tre dimensioni. Formula di Kirchhoff. Equazione d'onda in due dimensioni. Metodo della discesa e formula di Poisson. Formula di rappresentazione in dimensioni dispari e in dimensioni pari. Regolarità. Dominio di dipendenza e cono di influenza. Principio di Huygens. Problema non omogeneo e potenziali ritardati. Metodi energetici. Unicità. Velocità di propagazione finita.

5. Equazione di Hamilton-Jacobi

Equazioni non lineari del primo ordine. Integrali completi e involuipi. Metodo delle caratteristiche. Teorema di esistenza locale. Applicazioni. Equazione di Hamilton-Jacobi e principio variazionale di Hamilton. Equazioni di Eulero-Lagrange ed equazioni di Hamilton. Trasformata di Legendre e dualità fra Hamiltoniana e Lagrangiana.

Riferimenti bibliografici

- [1] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Dover Publications, 1990.
- [2] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.
- [3] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1982.
- [4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volume 2, Academic Press, New York, 1975