

## PROGRAMMA DI GEOMETRIA SUPERIORE 2

MATEMATICA ( Laurea Magistrale ).

A.A. 2015/16 - Prof.ssa Maria Falcitelli.

### **Esempi di varietà differenziabili.**

Spazi vettoriali reali di dimensione finita, con particolare riferimento a  $\mathbf{R}^n$ . La sfera  $\mathbf{S}^n(r)$ . Lo spazio proiettivo  $P_n(\mathbf{R})$ . Lo spazio iperbolico  $\mathbf{H}_r^n$ .

### **Connessioni lineari.**

Definizione di connessione lineare su una varietà  $M$ . Differenziale covariante di un campo tensoriale rispetto a una connessione. Connessione indotta su un aperto da una connessione su  $M$ . Proprietà di localizzabilità rispetto a una connessione. La connessione canonica su  $\mathbf{R}^n$ . Legame tra due connessioni su  $M$ . Derivata covariante di un campo vettoriale lungo una curva, rispetto a una connessione. Campi vettoriali paralleli e relative equazioni. Geodetiche rispetto a una connessione: definizione ed equazioni. Geodetiche rispetto alla connessione canonica su  $\mathbf{R}^n$ . Costruzione di una famiglia di connessioni avente le stesse geodetiche di una connessione assegnata. Trasporto parallelo lungo una curva. Esistenza di geodetiche di condizioni iniziali assegnate. Campo tensoriale di torsione di una connessione. Connessioni simmetriche. Campo tensoriale di curvatura di una connessione. Connessioni piatte. Identità del Bianchi.

### **Varietà Riemanniane.**

Definizioni di metrica Riemanniana su una varietà e di varietà Riemanniana. Metrica indotta su una sottovarietà di una varietà Riemanniana. Esempi: la metrica canonica su  $\mathbf{R}^n$  e la metrica indotta su  $\mathbf{S}^n(r)$ ; struttura di varietà Riemanniana sullo spazio iperbolico  $\mathbf{H}_r^n$ . Identificazione tra gli spazi vettoriali tangente e cotangente in un punto di una varietà Riemanniana. Prodotto scalare tra tensori di specie  $(r, s)$ . Gradiente di una funzione. Traccia di un campo tensoriale di specie  $(1, 1)$ . La connessione di Levi-Civita e i simboli di Christoffel. Calcolo dei simboli di Christoffel su  $\mathbf{R}^n, \mathbf{S}^n(r), \mathbf{H}_r^n$ . Trasporto parallelo su una varietà Riemanniana, come isometria. Isometrie tra varietà Riemanniane. Trasporto parallelo tra varietà isometriche. Distanza indotta da una metrica Riemanniana. Varietà complete e geodeticamente complete. Esempi. Metriche Riemanniane conformi e omotetiche, relazioni tra le corrispondenti connessioni di Levi-Civita.

### **Curvatura Riemanniana.**

Campo tensoriale di curvatura Riemanniana e relative proprietà. Curvature sezionali. Varietà con curvatura sezionale puntualmente costante: definizione e caratterizzazione. L'elicoide, come esempio di varietà a curvatura non costante. Lemma di Schür. Definizione ed esempi di space-forms. Classificazione degli

space-forms completi e semplicemente connessi. Spazi di rivestimento. Lo spazio proiettivo reale  $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ . La sfera  $\mathbf{S}^n(1)$  come rivestimento Riemanniano di  $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ . Classificazione degli space-forms completi di dimensione pari. Campo tensoriale di Ricci e curvatura scalare. Varietà Riemanniane di Einstein: definizione ed esempi. Varietà di Einstein 3-dimensionali. Curvatura scalare di una varietà di Einstein.

### **Sottovarietà di una varietà Riemanniana.**

Definizione di sottovarietà di una varietà Riemanniana. Campi vettoriali tangenti. Il fibrato normale e le sue sezioni. Esempio: il campo vettoriale normale alla sfera  $S^n(r)$ . Equazione di Gauss. Seconda forma fondamentale. Equazione di Weingarten. La connessione normale. Operatori di Weingarten e legame con la seconda forma fondamentale. Campo vettoriale di curvatura media. Sottovarietà totalmente geodetiche, totalmente ombelicali e minimali. Caratterizzazione delle sottovarietà totalmente geodetiche. Curvature principali in un punto. Equazioni di Gauss e Weingarten per ipersuperfici in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Esempi di ipersuperfici. Classificazione locale delle ipersuperfici totalmente ombelicali e non totalmente geodetiche in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Equazioni di Gauss, Codazzi e Ricci per la curvatura. Alcune proprietà delle sottovarietà di uno spazio a curvatura costante deducibili dalle suddette equazioni.

### **Sommersioni, sommersioni Riemanniane.**

Definizione di sommersione tra varietà differenziabili. La distribuzione verticale associata a una sommersione e i campi vettoriali proiettabili. Definizione di sommersione Riemanniana. Il sollevamento orizzontale di un campo vettoriale rispetto a una sommersione. Gli invarianti di una sommersione (tensori di O'Neill): definizione e proprietà. Una caratterizzazione dell'integrabilità della distribuzione orizzontale. Esempi di sommersioni Riemanniane e calcolo dei corrispondenti invarianti. Legame tra le curvature Riemanniane dello spazio totale, dello spazio base, delle fibre di una sommersione Riemanniana e relazioni per le curvature sezionali. Geodetiche rispetto alla connessione di Levi-Civita dello spazio totale: una caratterizzazione. Geodetiche orizzontali: definizione e proprietà. Sommersioni di Clairaut: definizione, teorema di Bishop ed esempi.

### **Testi consigliati.**

T. Aubin: A course in Differential Geometry- American Mathematical Society,  
B. Y. Chen: Geometry of submanifolds, Marcel Dekker,  
M. Do Carmo: Riemannian Geometry - Birkhäuser;  
S. Helgason: Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces - Academic Press;  
M. Falcitelli, S. Ianus, A.M. Pastore: Riemannian submersions and related topics

- World Scientific;

W. Klingenberg: Riemannian Geometry - Walter de Gruyter;

S.Kobayashi, K.Nomizu: Foundations of Differential Geometry, I, II - Interscience Publishers;

M.M. Postnikov: Geometry VI- Riemannian Geometry - Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 91;

G. Walschap: Metric structures in differential Geometry- Springer;

Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups - Scott Foresman.