Programma definitivo di GEOMETRIA SUPERIORE 1

Laurea Magistrale in Matematica

A.A. 2016/2017

Prof.[sse] Maria Laura FALCITELLI – Luigia DI TERLIZZI

ESEMPI DI VARIETÀ DIFFERENZIABILI

Spazi vettoriali reali di dimensione finita, con particolare riferimento a $\mathbf{R}^n$. La sfera $\mathbf{S}^n(r)$. Lo spazio proiettivo $P_n(\mathbf{R})$. Lo spazio iperbolico $\mathbf{H}^n_r$.

CAMPI TENSORIALI

Tensori di tipo (r,s) e algebra dei tensori su uno spazio vettoriale. Tensori di tipo (r,s) in un punto di una verietà e campi tensoriali di specie (r,s) su M. Algebra tensoriale. Operazione di contrazione sui campi tensoriali. Algebra di Grassmann.

DERIVAZIONI DELL'ALGEBRA TENSORIALE

Definizione di derivazione dell'algebra tensoriale e proprietà di localizzabilità. Azione di una derivazione sulle 1-forme e sui campi tensoriali. Derivazione determinata da un campo tensoriale di specie (1; 1). Derivata di Lie rispetto a un campo vettoriale. Teorema di rappresentazione di una derivazione.

CONNESSIONI LINEARI

Definizione di connessione lineare su una varietà M. Derivata covariante di un campo tensoriale rispetto a una connessione. Connessione indotta su un aperto da una connessione su M. Proprietà di localizzabilità rispetto a una connessione. La connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Legame tra due connessioni su M. Derivata covariante di un campo vettoriale lungo una curva, rispetto a una connessione. Campi vettoriali paralleli e relative equazioni. Geodetiche rispetto a una connessione: definizione ed equazioni. Geodetiche rispetto alla connessione canonica su $\mathbf{R}^n$. Costruzione di una famiglia di connessioni avente le stesse geodetiche di una connessione assegnata. Trasporto parallelo lungo una curva. Esistenza di geodetiche di condizioni iniziali assegnate. Campo tensoriale di torsione di una connessione. Connessioni simmetriche. Campo tensoriale di curvatura di una connessione. Connessioni piatte. Identità del Bianchi.

VARIETÀ RIEMANNIANE

Definizioni di metrica Riemanniana su una varietà e di varietà Riemanniana. Metrica indotta su una sottovarietà di una varietà Riemanniana. Esempi: la metrica canonica su $\mathbf{R}^n$ e la metrica indotta su $\mathbf{S}^n(r)$; struttura di varietà Riemanniana sullo spazio iperbolico $\mathbf{H}^n_r$. Prodotto scalare tra tensori di specie (r; s). Gradiente di una funzione. Traccia di un campo tensoriale di specie (1; 1). La connessione di Levi-Civita e i simboli di Christoffel. Calcolo dei simboli di Christoffel su $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{S}^n(r)$; $\mathbf{H}^n_r$. Trasporto parallelo su una varietà Riemanniana, come isometria. Isometrie tra varietà Riemanniane. Trasporto parallelo tra varietà isometriche. Distanza indotta da una metrica Riemanniana. Varietà complete e geodeticamente complete. Esempi. Metriche Riemanniane conformi e omotetiche, relazioni tra le corrispondenti connessioni di Levi-Civita.

CURVATURA RIEMANNIANA

Campo tensoriale di curvatura Riemanniana e relative proprietà. Curvature sezionali. Varietà con curvatura sezionale puntualmente costante: definizione e caratterizzazione. Elicoide, come esempio di varietà a curvatura non costante. Lemma di Schür. Definizione ed esempi di space-forms. Classificazione degli space-forms completi e semplicemente connessi. Lo spazio proiettivo reale $P_n(\mathbf{R})$. La sfera $\mathbf{S}^n(1)$ come rivestimento Riemanniano di $P_n(\mathbf{R})$. Classificazione degli space-forms completi e semplicemente connessi. Campo tensoriale di Ricci e curvatura scalare. Varietà Riemanniane di Einstein: definizione ed esempi. Varietà di Einstein 3-dimensionali. Curvatura scalare di una varietà di Einstein.

SOTTOVARIETA’ DI UNA VARIETÀ’ RIEMANNIANA

Definizione di sottovarietà di una varietà Riemanniana. Campi vettoriali tangenti. Il fibrato normale e le sue sezioni. Esempio: il campo vettoriale normale alla sfera $\mathbf{S}^n(r)$. Equazione di Gauss. Seconda forma fondamentale. Equazione di Weingarten. La connessione normale. Operatori di Weingarten e legame con la seconda forma fondamentale. Campo tensoriale di curvatura media. Sottovarietà totalmente geodetiche, totalmente ombelicali e minimali. Caratterizzazione delle sottovarietà totalmente geodetiche. Curvature principali in un punto. Equazioni di Gauss e di Weingarten per ipersuperfici di $\mathbf{R}^{n+1}$. Esempi di ipersuperfici. Classificazione locale delle ipersuperfici totalmente ombelicali e non totalmente geodetiche in $\mathbf{R}^{n+1.}$ Equazioni di Gauss, Codazzi e Ricci per la curvatura. Alcune proprietà delle sottovarietà di uno spazio a curvatura costante deducibili dalle suddette equazioni.

TESTI CONSIGLIATI

- M. Abate, F. Tovena: Geometria Differenziale – Springer
- T. Aubin: A Course in Differential Geometry - American Mathematical Society;
- A. Besse: Einstein Manifolds – Springer-Verlag;
- W. Boothby: An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry - Academic Press;
- M. Do Carmo: Riemannian Geometry – Birkhäuser;
- S. Helgason: Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces – Academic Press;
- W. Klingenberg: Riemannian Geometry - Walter de Gruyter;
- S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, I – Interscience Publishers;
- M. M. Postnikov: Geometry VI - Riemannian Geometry - Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 91;
- G. Walschap: Metric Structures in Differential Geometry- Springer;
- F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups - Scott Foresman.